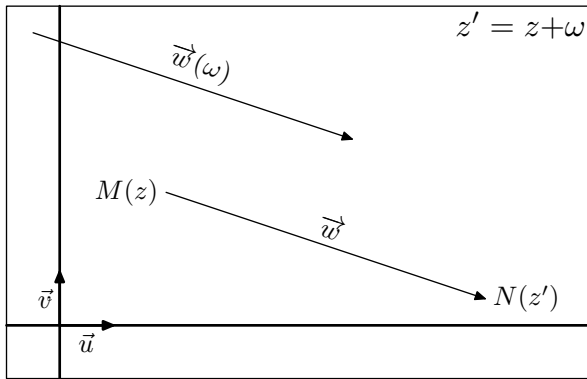


**Proposition : (Translation)**

Soit  $M$  et  $N$  deux points du plan d'affixes respectives  $z$  et  $z'$  et  $\vec{\omega}$  un vecteur d'affixe  $\omega$ .

Le point  $N$  est l'image du point  $M$  par la translation de vecteur  $\vec{\omega}$  si, et seulement si, on a :

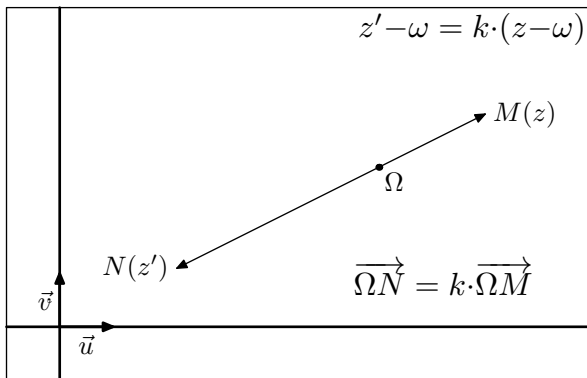
$$z' = z + \omega$$

**Proposition : (Homothétie)**

Soit  $M$ ,  $N$  et  $\Omega$  trois points du plan d'affixes respectives  $z$ ,  $z'$  et  $\omega$  ; soit  $k$  un réel non nul.

$M'$  est l'image du point  $M$  par l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $k$  si, et seulement si, on a l'égalité :

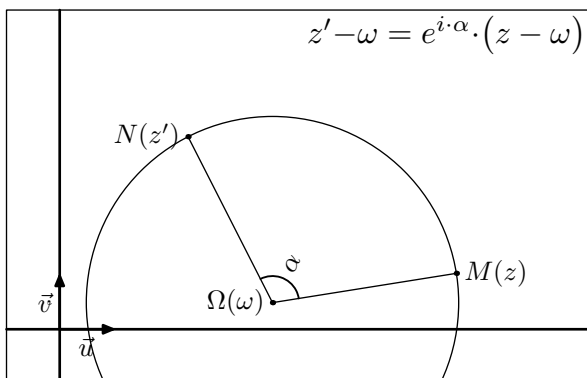
$$z' - \omega = k \cdot (z - \omega)$$

**Proposition : (Rotation)**

Soit  $M$ ,  $N$  et  $\Omega$  trois points du plan d'affixes respectives  $z$ ,  $z'$  et  $\omega$  ; soit  $\alpha$  un nombre réel.

$M'$  est l'image du point  $M$  par la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\alpha$  si, et seulement si, on a l'égalité :

$$z' - \omega = e^{i \cdot \alpha} \cdot (z - \omega)$$



Preuve :

- Supposons que le point  $N$  est le symétrique du point  $M$  par la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\alpha$  ; le point  $N$  est caractérisé par les propriétés suivantes :

$$\Omega N = \Omega M \quad ; \quad (\vec{\Omega M} ; \vec{\Omega N}) = \alpha$$

En traduisant ces égalités, sur les affixes des points  $M$ ,  $N$  et  $\Omega$ , on a :

$$\begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg \left( \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) = \alpha \quad (2\pi) \end{cases} \implies \begin{cases} \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1 \\ \arg \left( \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) = \alpha \quad (2\pi) \end{cases}$$

Ainsi, le nombre complexe  $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$  a pour module 1 et pour argument  $\alpha$  ; sa forme trigonométrique est :

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = 1 \cdot e^{i \cdot \alpha} = e^{i \cdot \alpha} \implies z' - \omega = e^{i \cdot \alpha} (z - \omega)$$

- Réciproquement, supposons que les affixes des points  $M$ ,  $N$  et  $\Omega$  vérifient la relation :

$$z' - \omega = e^{i \cdot \alpha} (z - \omega)$$

En prenant le module de cette égalité, on a :

$$|z' - \omega| = |e^{i \cdot \alpha} (z - \omega)| \implies |z' - \omega| = |e^{i \cdot \alpha}| \cdot |z - \omega|$$

$$\implies |z' - \omega| = |z - \omega| \implies \Omega M' = \Omega M$$

On en déduit l'égalité :

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i \cdot \alpha} \implies \arg \left( \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) = \alpha$$

$$\implies (\vec{\Omega M} ; \vec{\Omega M'}) = \alpha$$