Polynôme du second degré

A. Rappels:

Définition :

On appelle **polynôme du second degré**, toute expression algébrique admettant pour forme :

$$a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c$$

où a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

Remarque :

Quelques rappels d'algèbres de $2nd$:

r674-0

Remarque : *(Utilité de la forme factorisée)*

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2{\cdot}x^2 - 4{\cdot}x - 6$

On a $f(x) = 2{\cdot}(x-3)(x+1)$ et on en déduit :

- Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul. Les racines du polynômes sont :
  $x-3=0$ ou $x+1=0 \implies \mathcal{S} = \{-1\,;3\}$
-

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

B. Forme canonique:

Proposition : *(et définition)*

Pour toute fonction $f : x \mapsto a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ $(a \neq 0)$ du second degré, il existe deux nombres réels α et β tels que la fonction f admette pour expression :

$$f(x) = a{\cdot}(x-\alpha)^2 + \beta$$

Cette expression s'appelle **forme canonique du polynôme** $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$

Remarque : *(Utilité de la forme canonique)*

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2{\cdot}x^2 - 4{\cdot}x - 6$

On a $f(x) = 2{\cdot}(x-1)^2 - 8$ et on en déduit :

- Un carré est toujours positif :
  $(x-1)^2 \geqslant 0 \implies 2{\cdot}(x-1)^2 - 8 \geqslant -8$
  Le nombre -9 est un minorant de f sur $\mathbb{R}$.
  Puisque $f(1) = -8$, le nombre -8 est le minimum de f.
- Soit $a, b \in \left]-\infty\ 1\right]$ tels que $a < b$:

$$a < b \leqslant 1$$
$$a - 1 < b - 1 \leqslant 0$$
$$(a-1)^2 > (b-1)^2 \geqslant 0 \quad ^{(*)}$$

$$2{\cdot}(a-1)^2 > 2{\cdot}(b-1)^2$$
$$2{\cdot}(a-1)^2 - 8 > 2{\cdot}(b-1)^2 - 8$$
$$f(a) > f(b)$$

  f est décroissante sur $\left]-\infty\,;1\right]$ car deux nombres de cet intervalle et leurs images sont comparés dans le sens contraire.

$^{(*)}$ *la fonction carré est décroissante sur* $\mathbb{R}_-$

Preuve :

Sachant que le polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ est un polynôme du second degré, on a $a \neq 0$. Lors de cette preuve, on utilisera le résultat suivant :

$$\left(x + \frac{b}{2{\cdot}a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}{\cdot}x + \frac{b^2}{4{\cdot}a^2}$$

$$\implies \quad x^2 + \frac{b}{a}{\cdot}x = \left(x + \frac{b}{2{\cdot}a}\right)^2 - \frac{b^2}{4{\cdot}a^2}$$

On a les transformations algébriques suivantes :

$$a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c = a{\cdot}\left(x^2 + \frac{b}{a}{\cdot}x\right) + c$$

En utilisant la propriété précédente :

$$= a{\cdot}\left[\left(x + \frac{b}{2{\cdot}a}\right)^2 - \frac{b^2}{4{\cdot}a^2}\right] + c$$
$$= a{\cdot}\left(x + \frac{b}{2{\cdot}a}\right)^2 - a{\cdot}\frac{b^2}{4{\cdot}a^2} + c$$
$$= a{\cdot}\left(x + \frac{b}{2{\cdot}a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4{\cdot}a} - c\right)$$
$$= a{\cdot}\left(x + \frac{b}{2{\cdot}a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}\right)$$
$$= a{\cdot}\left[x - \left(-\frac{b}{2{\cdot}a}\right)\right]^2 + \left(-\frac{b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}\right)$$
$$= a{\cdot}(x-\alpha)^2 + \beta$$

La forme obtenue est la forme souhaitée avec pour valeur :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad ; \quad \beta = -\frac{b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}$$

La forme canonique est parfois utilisée sous la forme :

$$a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c = a{\cdot}\left[\left(x + \frac{b}{2{\cdot}a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a^2}\right]$$

Corollaire :

Tout polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ du second degré admet pour forme canonique :

$$a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c = a{\cdot}\left(x + \frac{a}{2{\cdot}b}\right)^2 - \frac{b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}$$

Exemple :

Pour trouver la forme canonique de l'expression

$$x^2 + 6x - 5$$

L'identité remarquable correspondant aux termes en x est :

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Mais : $x^2 + 6x \neq (x+3)^2$

Par contre, on a :

$$x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9$$

On peut donc écrire :

$$x^2 + 6x - 5 = \boxed{(x^2 + 6x)} - 5$$
$$= \boxed{(x+3)^2 - 9} - 5$$
$$= (x+3)^2 - 14$$

Exemple :

Pour trouver la forme canonique de l'expression

$$A = 3x^2 - 18x + 1$$

On factorise les deux termes en x par a :

$$A = 3(x^2 - 6x) + 1$$

On fait apparaitre l'identité remarquable commençant par $x^2-6x+\ldots$ C'est : $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

$$A = 3(x^2 - 6x + 9 - 9) + 1$$
$$A = 3\left[(x-3)^2 - 9\right] + 1$$

On développe le coefficient a :

$$A = 3(x-3)^2 - 27 + 1$$
$$A = 3(x-3)^2 - 26$$

Remarque :

- Considérons le polynôme x^2+x+1. Pour déterminer la forme canonique de ce polynôme, on remarque que les deux termes x^2+x s'obtiennent par développement de l'identité remarquable $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ dont la forme développée est $x^2+x+\frac{1}{4}$.
  Faisons apparaître cette expression développé dans notre polynôme :
  $$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 1$$
  $$= \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4} + 1\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$
  Nous venons de déterminer la forme canonique du polynôme x^2+x+1 avec : $\alpha = -\frac{1}{2}$; $\beta = \frac{3}{4}$
- Voici d'autres mises en forme canonique :
  - $2x^2 + 4x - 1 = 2{\cdot}(x+1)^2 - 3$
  - $-x^2 - 3x - 2 = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

C. Equations du second degré:

Proposition :

On considère un polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ du second degré $(a \neq 0)$. L'ensemble des racines d'un polynôme dépend du signe de son discriminant :

- Si $\Delta < 0$, le polynôme n'admet **aucune** racine.
  On note : $\mathcal{S} = \varnothing$
- Si $\Delta = 0$, le polynôme admet **une** racine.
  Plus précisément : $\mathcal{S} = \left\{-\frac{b}{2{\cdot}a}\right\}$
- Si $\Delta > 0$, le polynôme admet **deux** racines.
  Plus précisément : $\mathcal{S} = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\,;\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\right\}$

Preuve :

Le polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ du second degré, avec $a \neq 0$, admet pour forme canonique :

$$a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}$$

Notons Δ le discriminant du polynôme : $\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c$

Notons x une racine de ce polynôme :

$$a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c = 0$$
$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a} = 0$$

On a $a \neq 0$:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a^2} = 0$$

On obtient :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a^2}$$

Avec la notation adoptée :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4{\cdot}a^2} \quad (*)$$

- Lorsque $\boldsymbol{\Delta < 0}$:
  On remarque que le membre de gauche, étant un carré, est positif ou nul alors que le membre de droite est du même signe que Δ : donc strictement négatif. Les deux membres n'étant pas de même signe, cette équation n'admet aucune solution.
  $\mathcal{S} = \varnothing$
- Lorsque $\boldsymbol{\Delta = 0}$:
  On obtient $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$: cette équation admet une unique racine $-\frac{b}{2a}$. On a : $\mathcal{S} = \left\{-\frac{b}{2{\cdot}a}\right\}$
- Lorsque $\boldsymbol{\Delta > 0}$: reprenons l'expression $(*)$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4{\cdot}a^2}$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4{\cdot}a^2} = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{(2{\cdot}a)^2} = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\right)^2 = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\right) = 0$$
$$\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\right)\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\right) = 0$$

  Un produit étant nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = 0 \quad \Big| \quad x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = 0$$

  On obtient les 2 racines du polygône :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$$

  On a : $\mathcal{S} = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\,;\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\right\}$

Exemple :

- Résolvons l'équation : $\boldsymbol{2x^2 - 3x - 2 = 0}$
  Le polynôme $2x^2-3x-2$ admet pour discriminant :
  $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4{\times}2{\times}(-2) = 9 + 16 = 25$
  On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$
  Le discriminant étant strictement positif, cette équation admetles deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-5}{2{\times}2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+5}{2{\times}2} = \frac{8}{4} = 2$$

- Résolvons l'équation : $\boldsymbol{-4x^2 + 12x - 9 = 0}$
  Le polynôme $-4x^2+12x-9$ admet pour discriminant :
  $\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 12^2 - 4{\times}(-4){\times}(-9) = 144 - 144 = 0$
  Le discriminant étant nul, on en déduit que ce polynôme admet une unique racine :
  $x = -\frac{b}{2{\cdot}a} = -\frac{12}{2{\times}(-4)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$
- Résolvons l'équation : $\boldsymbol{3x^2 - 4x + 2 = 0}$
  L'expression $3x^2-4x+2$ admet pour discriminant :
  $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4{\times}3{\times}2 = 16 - 24 = -8$
  Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme n'admet aucune racine.