Proposition :

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et deux points A et B de coordonnées respectives $(x_A\,;y_A)$ et $(x_B\,;y_B)$.

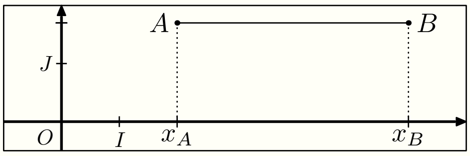
La distance AB est donnée par la formule :

$$AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$

Preuve :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ distincts.
Effectuons une disjonction de cas sur les coordonnées des points A et B :

- Supposons $y_A=y_B$
  Puisque les points A et B sont distincts alors $x_A\neq x_B$.
  On peut représenter cette situation par la représentation ci-dessous :



  En considérant les points $M(x_A\,;0)$ et $N(x_B\,;0)$, on remarque que le quadrilatère $ABNM$ est un rectangle.

  - Si $x_A<x_B$ alors $AB=x_B-x_A$.
  - Si $x_A>x_B$ alors $AB=x_A-x_B$.

  Le carré de deux nombres et de leurs opposés étant égaux, on en d'eduit : $\left(x_B-x_A\right)^2=\left(x_A-x_B\right)^2$
  Quelque soit le cas ci-dessous, on en déduit :
  $AB^2=\left(x_B-x_A\right)^2$

  Or sachant que $y_A=y_B$, on en déduit :

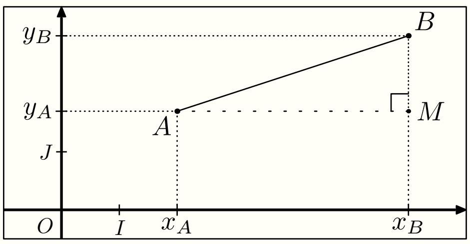
$$y_A=y_B$$
$$0=y_B-y_A$$
$$0=\left(y_B-y_A\right)^2$$
$$AB^2=\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2$$
$$\sqrt{AB^2}=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$

  La distance étant strictement positive :

$$AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$

- Supposons $y_A=y_B$. Une démonstration analogue à la démonstration permet de montrer que :
  $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$

- Sinon, la configuration des points est représentée ci-dessous où M est le point de coordonnées $(x_B\,;y_A)$



  D'après les points démontrés précédemment, on a :
  $AM^2=\left(x_B-x_A\right)^2$; $MB^2=\left(y_B-y_A\right)^2$

  Dans le triangle ABM rectangle en M et d'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité :

$$AB^2=AM^2+MB^2$$
$$AB^2=\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2$$
$$AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$

Proposition :

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et deux points A et B de coordonnées respectives $(x_A\,;y_A)$ et $(x_B\,;y_B)$.

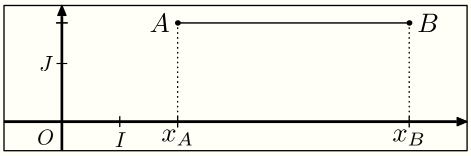
La distance AB est donnée par la formule :

$$AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$

Preuve :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ distincts.
Effectuons une disjonction de cas sur les coordonnées des points A et B :

- Supposons $y_A=y_B$
  Puisque les points A et B sont distincts alors $x_A\neq x_B$.
  On peut représenter cette situation par la représentation ci-dessous :



  En considérant les points $M(x_A\,;0)$ et $N(x_B\,;0)$, on remarque que le quadrilatère $ABNM$ est un rectangle.

  - Si $x_A<x_B$ alors $AB=x_B-x_A$.
  - Si $x_A>x_B$ alors $AB=x_A-x_B$.

  Le carré de deux nombres et de leurs opposés étant égaux, on en d'eduit : $\left(x_B-x_A\right)^2=\left(x_A-x_B\right)^2$
  Quelque soit le cas ci-dessous, on en déduit :
  $AB^2=\left(x_B-x_A\right)^2$

  Or sachant que $y_A=y_B$, on en déduit :

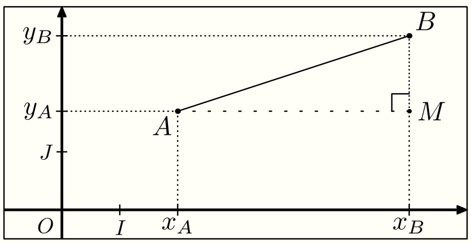
$$y_A=y_B$$
$$0=y_B-y_A$$
$$0=\left(y_B-y_A\right)^2$$
$$AB^2=\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2$$
$$\sqrt{AB^2}=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$

  La distance étant strictement positive :

$$AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$

- Supposons $y_A=y_B$. Une démonstration analogue à la démonstration permet de montrer que :
  $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$

- Sinon, la configuration des points est représentée ci-dessous où M est le point de coordonnées $(x_B\,;y_A)$



  D'après les points démontrés précédemment, on a :
  $AM^2=\left(x_B-x_A\right)^2$; $MB^2=\left(y_B-y_A\right)^2$

  Dans le triangle ABM rectangle en M et d'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité :

$$AB^2=AM^2+MB^2$$
$$AB^2=\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2$$
$$AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$

