Polynômes du second degré

A. Rappels :

1. Développement :

On utilise :

- la distributivité :

$$a\,(b+c) \;=\; a\times b \;+\; a\times c$$

- la double-distributivité :

$$(a+b)(c+d) \;=\; a\times c \;+\; a\times d \;+\; b\times c \;+\; b\times d$$

- Les identités remarquables :
  - $(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$
  - $(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$
  - $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

2. Factorisation :

- On factorise à l'aide de la distributivité en reconnaissant le facteur commun :

$$\begin{aligned}
&(x+1)(2-x) - 2\cdot(x+1)(2\cdot x+3)\\
&\quad = (x+1)\big[(2-x) - 2\cdot(2\cdot x+3)\big]\\
&\quad = (x+1)(2-x-4\cdot x-6) = (x+1)(-4-5\cdot x)
\end{aligned}$$

Parfois, il faut reconnaître le facteur commun :

$$\begin{aligned}
&x\cdot(2x-1) + (x+1)(4x-2)\\
&\quad = x\cdot(2x-1) + (x+1)\big[2\cdot(2x-1)\big]\\
&\quad = (2x-1)\big[x+2\cdot(x+1)\big] = (2x-1)(x+2x+2)\\
&\quad = (2x-1)(3x+2)
\end{aligned}$$

- Dans certains cas, on peut reconnaître le développement d'une identité remarquable :
  - $4\cdot x^2 + 12\cdot x + 9 = (2\cdot x)^2 + 12\cdot x + 3^2 = (2x+3)^2$
  - $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3)$

3. Equations :

- Si l'équation est une équation du premier degré *(pas de terme en x^2)*.

Principe de l'équilibre

$$\begin{aligned}
5\cdot x+4 &= 2\cdot x+7\\
5\cdot x+4-4 &= 2\cdot x+7-4\\
5\cdot x &= 2\cdot x+3\\
5\cdot x-2\cdot x &= 2\cdot x+3-2\cdot x\\
3\cdot x &= 3\\
\frac{3\cdot x}{3} &= \frac{3}{3}\\
x &= 1
\end{aligned}$$

Autre rédaction :

$$\begin{aligned}
5\cdot x+4 &= 2\cdot x+7\\
5\cdot x &= 2\cdot x+7-4\\
5\cdot x &= 2\cdot x+3\\
5\cdot x-2\cdot x &= 3\\
3\cdot x &= 3\\
x &= \frac{3}{3}\\
x &= 1
\end{aligned}$$

- Si l'équation est une équation du second degré *(présence de terme en x^2)* alors on essaye d'identifier l'équation à une équation produit nulle :

$$(x+2)(3-x) = (2x+1)(x+2)$$

On fait passer toutes les expressions du même côté et on

$$\begin{aligned}
(x+2)(3-x) - (2x+1)(x+2) &= 0\\
(x+2)(3-x-2x-1) &= 0\\
(x+2)(2-3x) &= 0
\end{aligned}$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$\begin{aligned}
x+2 &= 0\\
x &= -2
\end{aligned}
\qquad\bigg|\qquad
\begin{aligned}
2-3x &= 0\\
-3x &= -2\\
x &= \frac{-2}{-3}\\
x &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Ainsi, cette équation admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \left\{-2\,;\,\frac{2}{3}\right\}$

4. Tableau de signes :

Proposition :

Considérons la fonction affine f définie par :
$f(x) = a\cdot x + b$

- La fonction f admet un unique zéro $-\frac{b}{a}$.
- Le tableau de signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$ dépend de son coefficient a directeur :
  - Si $a>0$ *(la fonction est croissante)* :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$a\cdot x+b$		$-$	0	$+$	

  - Si $a<0$ *(la fonction est décroissante)* :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$a\cdot x+b$		$+$	0	$-$	

Exemple :

On étudie le signe d'un produit ou d'un quotient de facteurs de degré 1 : d'où la nécessité de factoriser.
Considérons la fonction f dont la forme factorisée est :
$f(x) = (x+1)(1-4x)$

On a le tableau ci-dessous des facteurs :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$1-4x$		$+$	|	$+$	0	$-$	

On effectue la règle des signes colonnes par colonnes

$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. Inéquations :

- Si l'inéquation est du premier degré *(pas de terme en x^2)*, on utilise la même méthode que pour les équations en appliquant également la règle suivante : "*Multiplier ou diviser par un nombre négatif change le sens de comparaison*" :

$$\begin{aligned}
x+2 &> 3x+7\\
x &> 3x+7-2\\
x &> 3x+5\\
x-3x &> 3x+5-3x\\
-2x &> 5\\
x &< \frac{5}{-2}\\
x &< -\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des nombres strictement inférieure à $-\frac{5}{2}$: $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\frac{5}{2}\right[$

- Sinon, on se ramène à l'étude du signe d'un produit ou d'un quotient par une factorisation :

$$\begin{aligned}
(x+1)(2-x) &\geqslant (x+1)(3x+1)\\
(x+1)(2-x) - (x+1)(3x+1) &\geqslant 0\\
(x+1)\big[(2-x)-(3x+1)\big] &\geqslant 0\\
(x+1)(2-x-3x-1) &\geqslant 0\\
(x+1)(1-4x) &\geqslant 0
\end{aligned}$$

Le produit du membre de gauche a été étudié précédemment. On en déduit l'ensemble des solutions :
$\mathcal{S} = \left[-1\,;\,\frac{1}{4}\right]$

