Suites arithmétiques et géométriques

A. Suites :

1. Définition :

Définition :

Une **suite numérique** est une liste ordonnée de nombres. Les valeurs de la liste s'appelle des **termes de la suite**.

Une **suite numérique définie sur** $\mathbb{N}$ est une liste de nombres où chacun d'eux est indexé par un entier naturel.
L'index d'un terme est appelé **rang du terme**.

Remarque :

Ci-dessous sont présentés les dix premiers termes d'une suite définie sur $\mathbb{N}$:

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Valeur	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

Voici quelques utilisations du vocabulaire lié aux suites :

- Le terme 31 a pour rang 4.
- Le terme de rang 7 a pour valeur 255.
- Le successeur du terme de rang 6 a pour valeur 255.
- Le prédécesseur du terme 31 a pour rang 3.

Notation :

- Une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ est généralement notée par l'une des notations suivantes :
  (u) ; (u_n) ; $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
  Le terme de rang n sera noté u_n ou $u(n)$.
- Pour une suite dont le premier terme est de rang 1, on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
- Pour une suite dont le premier terme est de rang k, on note $(u_n)_{n\geqslant k}$

Remarque :

- Une suite définie sur $\mathbb{N}$ est équivalent à une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: $u : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$
  $n \longmapsto u(n)$
- Le successeur du terme u_n a pour rang $n+1$ et se note u_{n+1}.
  Le prédécesseur du terme u_n a pour rang $n-1$ et se note u_{n-1}.

2. Mode de génération :

Définition :

- On dit qu'une suite est définie par une **formule par récurrence** si la valeur de ses termes se calcule en fonction de la valeur des termes précédents.
- On dit qu'une suite est définie par une **formule explicite** si la valeur de ses termes se calcule en fonction du rang de ses termes.

Remarque :

- Exemples de suites définies par une formule de récurrence :
  - La suite (u_n) dont le premier terme vaut 2 et dont la valeur d'un terme est le double du terme précédent.
    Cette suite est définie par les deux relations ci-dessous :
    $u_0 = 2$; $u_{n+1} = u_n\times 2$
  - La suite de l'exemple **A.1** est définie par les deux relations :
    $u_0 = 1$; $u_{n+1} = 2\cdot u_n + 1$
- Exemples de suites définies par une formule explicite :
  - la suite (u_n) dont le terme de rang n a pour valeur n^2.
    Cette suite est définie par la relation : $u_n = n^2$
  - La suite de l'exemple **A.1** est aussi définie par la relation : $u_n = 2^{n+1}-1$

B. Suites arithmétiques :

1. *Définition par récurrence :*

Définition :

Une suite de nombres est dite **suite arithmétique** si on passe d'un terme à un autre en ajoutant toujours le même nombre.

Ce nombre s'appelle la **raison** de la suite arithmétique.

Remarque :

Cette définition peut se traduire par :

- Pour connaitre la valeur d'un terme *(sauf le premier)*, on ajoute la raison au terme précédent.
- A partir d'un terme, pour connaitre la valeur de son successeur, on ajoute la raison à la valeur actuelle.
- On traduit ces deux phrases par la relation :
  $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

2. *Formule explicite :*

Proposition :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Le terme de rang n admet la relation :
$u_n = u_0 + n\times r$.

3. *Exemple :*

(u_n) la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 3 :

- A partir de la définition *(par récurrence)*, on a :
  $u_1 = u_0 + 3 = 4$; $u_2 = u_1 + 3 = 7$
- A partir de la formule explicite :
  $u_{50} = u_0 + 50\times r = 1 + 50\times 3 = 151$

C. Suites géométriques :

1. *Définition par récurrence :*

Définition :

Une suite de nombres est dite **suite géométrique** si on passe d'un terme à un autre en multipliant toujours le même nombre.

Ce nombre s'appelle la **raison** de la suite géométrique

Remarque :

Cette définition peut se traduire par :

- Pour connaitre la valeur d'un terme *(sauf le premier)*, on multiplie le terme précédent par la raison.
- A partir d'un terme, pour connaitre la valeur de son successeur, on multiplie la valeur actuelle par la raison.
- On traduit ces deux phrases par la relation :
  $u_{n+1} = u_n\times q$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

2. *Formule explicite :*

Proposition :

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q. Le terme de rang n admet l'expression :
$v_n = v_0\times q^n$

3. *Exemple :*

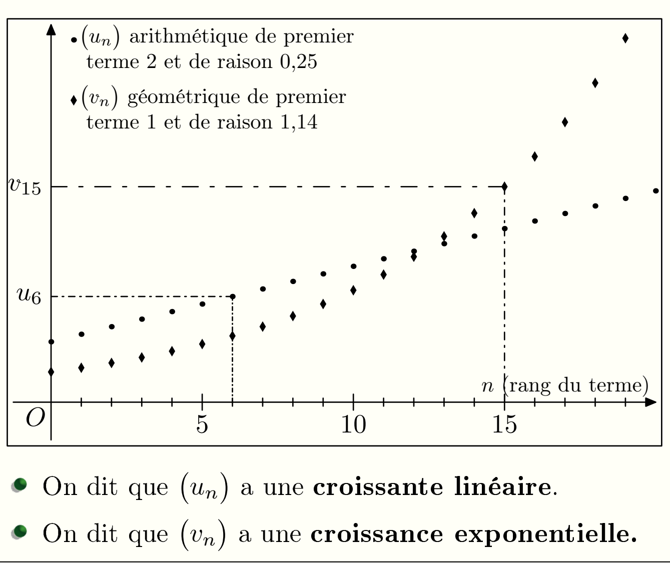
(v_n) la suite géométrique de premier terme 3 et de raison 2 :

- A partir de la définition *(par récurrence)*, on a :
  $v_1 = v_0\times 2 = 6$; $v_2 = v_1\times 2 = 12$
- A partir de la formule explicite :
  $v_4 = v_0\times q^4 = 3\times 2^4 = 48$

D. Représentation :

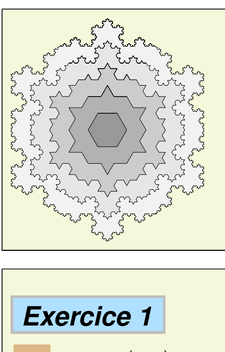
Remarque :

Ci-dessous sont représentés les termes des deux suites (u_n) et (v_n) :



- On dit que (u_n) a une **croissante linéaire**.
- On dit que (v_n) a une **croissance exponentielle.**

E. A étudier :



Découvrez les flocons de Von Koch

rq434-0

Exercice 1

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique dont on connait deux termes :
   $u_4 = 12$; $u_{22} = -24$
   Donner, en justifiant votre démarche, les éléments caractéristiques de cette suite.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique dont on connait deux termes :
   $v_4 = 8$; $v_7 = \dfrac{64}{27}$
   Donner, en justifiant votre démarche, les éléments caractéristiques de cette suite.

c5135.pdf