Etudes de suites

A. Variations:

1. Définition:

Définition:

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$:

- (u_n) est **décroissante à partir du rang** k si pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant k$, on a: $u_n \geqslant u_{n+1}$
- (u_n) est **constante à partir du rang** k si pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant k$, on a: $u_n = u_{n+1}$
- (u_n) est **croissante à partir du rang** k si pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant k$, on a: $u_n \leqslant u_{n+1}$
- (u_n) est **monotone à partir du rang** k, si pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant k$, la suite (u_n) n'admet qu'un seul sens de variation.

Remarque:

- La stricte décroissante *(resp. stricte croissante)* est définie en utilisant la comparaison stricte $u_n > u_{n+1}$ *(resp.* $u_n < u_{n+1}$*)*.

2. Suites arithmétiques:

Proposition:

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r:

- Si $r<0$, la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.
- Si $r=0$, la suite (u_n) est constante sur $\mathbb{N}$.
- Si $r>0$, la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Exemple:

La suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 3 est une suite croissante.

La suite arithmétique de premier terme 3 et de raison -2 est une suite décroissante.

3. Suites géométriques:

Proposition:

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 strictement positif *($u_0 > 0$)* et de raison q strictement positive *($q>0$)*:

- si $0<q<1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- si $q=1$ alors la suite (u_n) est constante.
- si $q>1$ alors la suite (u_n) est croissante.

Exemple:

La suite géométrique de premier terme 4 et de raison 0,3 est une suite décroissante.

La suite géométrique de premier terme 0,5 et de raison 2 est une suite croissante.

Remarque:

Lorsque la suite géométrique a:

- son premier terme négatif et sa raison positive. Les sens de variations sont différents.
  Par exemple, pour la suite géométrique (u_n) de premier terme -1 et de raison 2:
  $u_0 = -1 \quad ; \quad u_1 = -2 \quad ; \quad u_2 = -4 \quad ; \quad u_3 = -8$
  La suite (u_n) est décroissante.
- sa raison est négative. On dira que la suite est **alternée**.
  Par exemple, pour la suite géométrique (u_n) de premier terme 1 et de raison -2:
  $u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = -2 \quad ; \quad u_2 = 4 \quad ; \quad u_3 = -8$
  Les signes des termes de la suite (u_n) sont alternés.

4. Différence des termes consécutifs:

Proposition:

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et k un entier naturel. On a les propriétés suivantes:

- si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout $n \geqslant k$ alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang k.
- si $u_{n+1} - u_n = 0$ pour tout $n \geqslant k$ alors la suite (u_n) est constante à partir du rang k.
- si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant k$ alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang k.

Exemple:

Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la formule explicite: $u_n = \dfrac{5n-1}{(n+1)^2}$

Etudions la différence de deux termes successifs:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-5n^2-3n+8}{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2} = \frac{-(n-1)(5n+8)}{(n+1)^2(n+2)^2}$$

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, la différence $u_{n+1} - u_n$ négative ou nulle: la suite (u_n) est décroissante.

5. Quotient des termes positifs successifs:

Proposition:

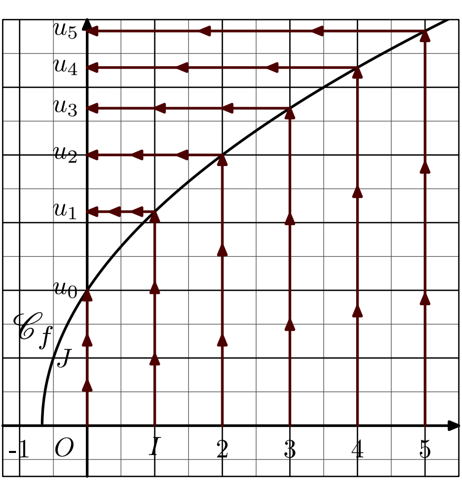
Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ où tous ses termes sont strictement positifs *($u_n > 0$)* et k un entier naturel. On a les propriétés suivantes:

- si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant k$ alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang k.
- si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ pour tout $n \geqslant k$ alors la suite (u_n) est constante à partir du rang k.
- si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant k$ alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang k.

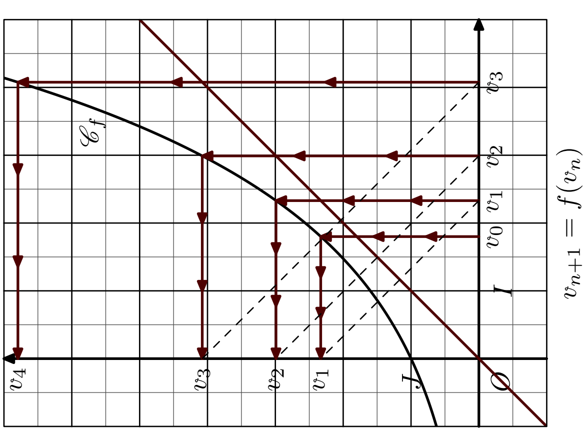
Exemple:

B. Représentation:

1. Suite définie explicitement:



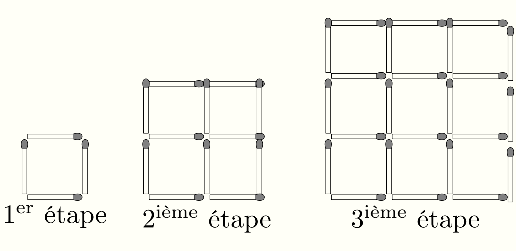
2. Suite définie par récurrence:



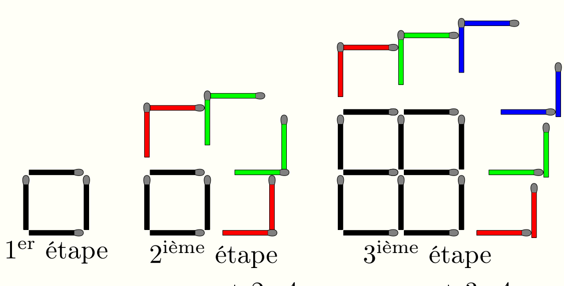
C. Forme explicite et forme implicite:

Exemple:

Considérons la construction des motifs successifs ci-dessous à l'aide d'allumettes:



En notant u_n le nombre d'allumettes utilisées pour construire le motif à l'étape n et à l'aide de la représentation ci-dessous:

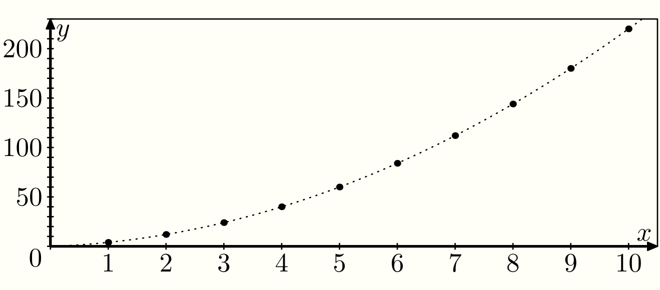


$u_2 = u_1 + 2 \times 4 \qquad u_3 = u_2 + 3 \times 4$

On établit la relation de récurrence:

$u_1 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 4 \cdot (n+1)$

Ci-dessous, la représentation des 10 premiers termes de la suite (u_n):



On reconnait l'aspect des paraboles et après quelques recherches, on conjecture que la suite (u_n) est égale à la suite (v_n) définie explicitement pour tout entier naturel n strictement positif par:

$v_n = 2 \cdot n^2 + 2 \cdot n$

On établit cette conjecture en:

- Montrant que ces deux suites ont le même premier terme:
  $u_1 = 4 \quad ; \quad v_1 = 2 \times 1^2 + 2 \times 1 = 2 + 2 = 4$
- En montrant que la suite (v_n) vérifie la même relation de récurrence que la suite (u_n):
  - $v_{n+1} = 2 \cdot (n+1)^2 + 2 \cdot (n+1) = 2 \cdot (n^2 + 2 \cdot n + 1) + 2 \cdot n + 2$
    $= 2 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 2 + 2 \cdot n + 2 = 2 \cdot n^2 + 6 \cdot n + 4$
  - $v_n + 4(n+1) = (2n^2 + 2n) + 4n + 4$
    $= 2n^2 + 6n + 4$

Ces deux suites sont donc égales: à l'étape n, il faut $2 \cdot n^2 + 2 \cdot n$ allumettes pour construire le motif.

D. Notions de limite de suite:

1. Définition:

Remarque:

En classe de première, aucune définition formelle de la limite d'une suite ne sera donnée. Ainsi, la définition ci-dessous n'en est pas vraiment une mais permet d'aborder la notion de limite d'une suite.

Définition: *(ou presque)*

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

- les valeurs des termes u_n se stabilisent vers un nombre $\ell \in \mathbb{R}$. On dit alors que:
  - la suite (u_n) **converge vers la valeur ℓ**
  - ou la suite (u_n) **tends vers la valeur ℓ**

  et on note: $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \ell$
- les valeurs des termes u_n ne se stabilisent pas vers un nombre. On dit alors que la suite (u_n) **diverge** et on distingue deux cas:
  - les valeurs des termes u_n se rapprochent de $+\infty$ *($-\infty$)*, on note alors:
    $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = +\infty \qquad \left(\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = -\infty\right)$
  - les valeurs des termes u_n ne se stabilisent pas vers un nombre et elles ne se rapprochent pas de $-\infty$ ou $+\infty$.

Exemple:

- Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par:
  $u_0 = 10 \quad ; \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$
  L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir la valeur approchée des onze premiers termes de la suite (u_n)

n	u_n
0	10
1	5,1
2	2,746 078 431 372 549 019 607 843 137 254 90
3	1,737 194 874 379 598 322 727 877 298 723 84
4	1,444 238 094 866 231 938 963 795 838 286 68
5	1,414 525 655 148 737 741 224 994 312 548 31
6	1,414 213 596 802 269 328 471 474 531 553 54
7	1,414 213 562 373 095 467 892 568 722 872 92
8	1,414 213 562 373 095 048 801 688 724 209 76
9	1,414 213 562 373 095 048 801 688 724 209 69
10	1,414 213 562 373 095 048 801 688 724 209 69

On conjecture que la suite $\left(u_n\right)$ converge et :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \sqrt{2}$

Voici un algorithme permettant d'obtenir les termes de la suite $\left(u_n\right)$

```
n ← 0
u ← 10
Tant que n<11
  // le terme actuel
  Afficher(n," ",u)
  // le terme suivant
  u ← 1/2·(u + 2/u)
  n ← n+1
```

```
n=0
u=10
while n<11:
  print(n," ",u)
  u=0.5*(u+2/u)
  n=n+1
```

- Soit $\left(v_n\right)$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :
  $v_n = n^2+n+2$
  Le tableau de valeurs ci-dessous permet de conjecturer que la suite $\left(v_n\right)$ diverge et plus précisément : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = +\infty$

n	u_n
0	2
1	4
2	8
3	14
4	22
5	32

n	u_n
6	44
7	58
8	74
9	92
10	112
11	134

...

n	u_n
150	22 652
151	22 954
152	23 258
153	23 564
154	23 872
155	24 182

Voici un algorithme permettant d'obtenir les termes de la suite $\left(v_n\right)$

```
Pour n allant de 0 à 155
  u ← n²+n+2
  Afficher(n," ",u)
```

```
for n in range(0,156):
    u=n**2+n+2
    print(n," ",u)
```

- Soit la fonction f affine par morceaux définie par :
  $$\begin{cases} f(x) = -2\cdot x - 1 & \text{pour } x\in\left]-\infty\,;1\right] \\ f(x) = x-4 & \text{pour } x\in\left[1\,;+\infty\right[\end{cases}$$
  Soit $\left(w_n\right)$ la suite définie par récurrence par :
  $w_0 = 4 \quad ; \quad w_{n+1} = f\left(w_n\right)$

  Le tableau de valeurs ci-dessous permet conjecturer que la suite $\left(u_n\right)$ est divergente. Plus précisément, elle est périodique de période 3 à partir du rang 3 :

n	w_n
0	4
1	0
2	-1
3	1
4	-3
5	5

n	w_n
6	1
7	-3
8	5
9	1
10	-3
11	5

...

n	w_n
12	1
13	-3
14	5
15	1
16	-3
17	5

Voici un algorithme permettant d'obtenir les termes de la suite $\left(w_n\right)$

```
u ← 4
Pour n allant de 0 à 17
  Afficher(n," ",u)
  Si u < 1
    Alors u ← −2·x − 1
    Sinon u ← x − 4
  Fin Si
```

2. Représentation et suite explicite :

Exemple :

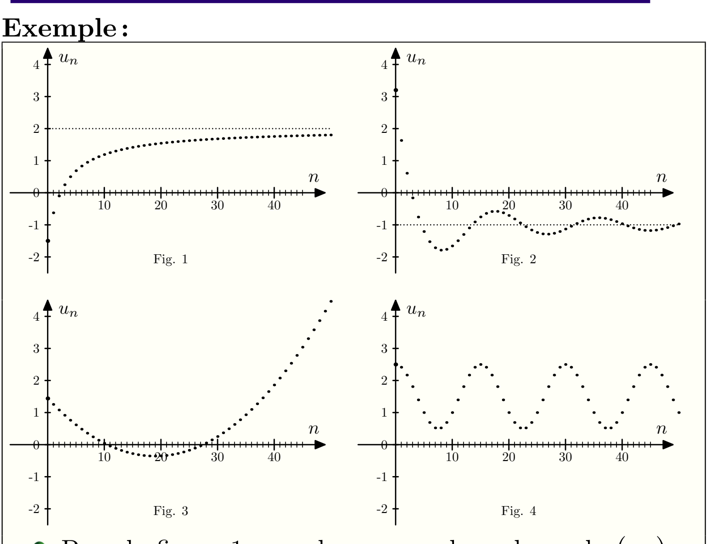


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

- Pour la figure 1 : on observe que les valeurs de $\left(u_n\right)$ se stabilise vers 2 lorsque n devient très grand.
  On conjecture : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 2$
- Pour la figure 2 : on observe que les valeurs de $\left(u_n\right)$ se stabilise vers -1 lorsque n devient très grand.
  On conjecture : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = -1$
- Pour la figure 3 : on observe que les valeurs de $\left(u_n\right)$ ne cesse de croitre sans stabilisation à partir du rang 20. De plus, l'allure des points représentant les termes de la suite $\left(u_n\right)$ ressemble à une parabole.
  On conjecture : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$
- Pour la figure 4 : les valeurs des termes de la suite $\left(u_n\right)$ semblent cyclique et ne se stabilise pas.
  On conjecture que la suite $\left(u_n\right)$ n'admet pas de limite.

3. Représentation et suite récurrente :

Exemple :

Dans les deux exemples ci-dessous, la suite $\left(u_n\right)$ est définie par récurrence, à l'aide de la valeur u_0 du premier terme et d'une fonction f, par la relation :
$u_{n+1} = f\left(u_n\right) \qquad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$

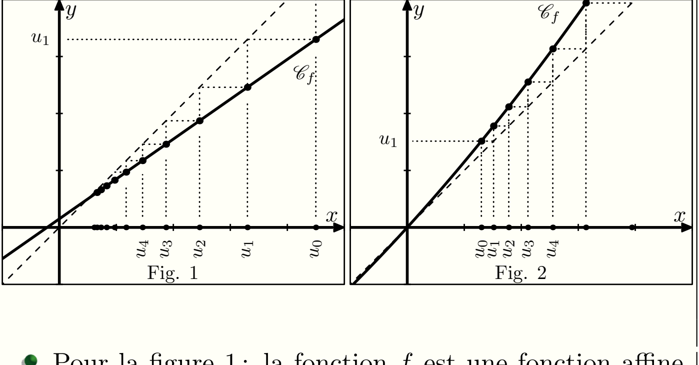


Fig. 1 Fig. 2

- Pour la figure 1 : la fonction f est une fonction affine. On remarque que les valeurs des termes de la suite $\left(u_n\right)$, reportées sur l'axe des abscisses, se stabilisent. Ici, on a : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 0{,}5$
- Pour la figure 2 : la fonction f est une fonction affine. On remarque que les valeurs des termes de la suite $\left(u_n\right)$, reportées sur l'axe des abscisses, se stabilisent. Ici, on a : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$