

Proposition :

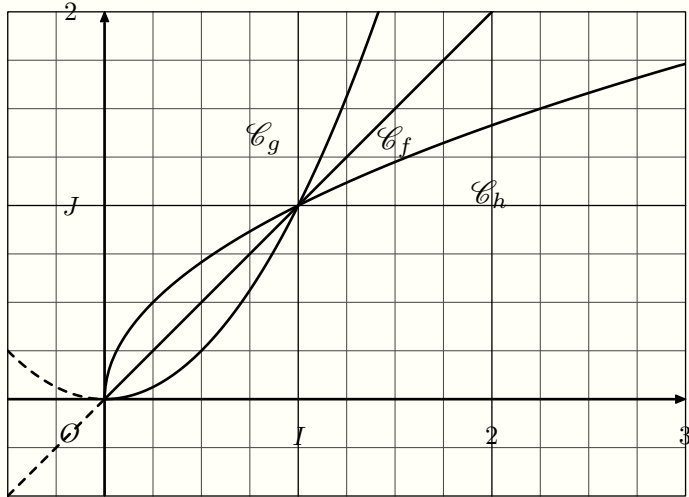
- Pour tout nombre réel x appartenant à $[0; 1]$, on a la comparaison : $\sqrt{x} \geq x \geq x^2$
- Pour tout nombre réel x appartenant à $[1; +\infty[$, on a la comparaison : $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$

Preuve :

On considère les trois fonctions f, g, h définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f: x \mapsto x \quad ; \quad g: x \mapsto x^2 \quad ; \quad h: x \mapsto \sqrt{x}$$

dont les courbes représentatives sont données dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé ci-dessous :



- Etudions les positions relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et sur $\mathbb{R}_+$.

On a la factorisation : $g(x) - f(x) = x^2 - x = x \cdot (x - 1)$

Etudions le signe de la différence $g(x) - f(x)$:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	—	0	+	+
$x - 1$	—	—	0	+
$g(x) - f(x)$		0	—	+

On en déduit les comparaisons des fonctions f et g sur $\mathbb{R}_+$:

➡ Sur l'intervalle $[0; 1]$, on a :

$$x^2 - x < 0 \implies x^2 < x \implies g(x) < f(x)$$

➡ Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, on a :

$$x^2 - x > 0 \implies x^2 > x \implies g(x) > f(x)$$

- Etudions les positions relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$ et sur $\mathbb{R}_+$.

On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) - h(x) &= x - \sqrt{x} = (x - \sqrt{x}) \cdot \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \\ &= \frac{(x - \sqrt{x}) \cdot (x + \sqrt{x})}{x + \sqrt{x}} = \frac{x^2 - (\sqrt{x})^2}{x + \sqrt{x}} = \frac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

Le dénominateur étant toujours positif sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de deux nombres positifs. Le signe du quotient ne dépend que du numérateur qui est égal à $g(x) - f(x)$. On en déduit :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f(x)-h(x)$		0	—	0	+

Ainsi, on obtient les comparaisons suivantes :

➡ Sur l'intervalle $]0; 1]$:

$$\frac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}} < 0 \implies f(x) - h(x) < 0 \implies f(x) < h(x)$$

➡ Sur l'intervalle $[1; +\infty[$:

$$\frac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}} > 0 \implies f(x) - h(x) > 0 \implies f(x) > h(x)$$