Proposition :

Soit A et B deux points distincts du plan. L'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan vérifiant la relation :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$

est le cercle de diamètre $[AB]$.

Preuve :

Soit A et B deux points distincts du plan et :

$$\mathcal{E}=\left\{M \mid \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\right\}$$

Notons I le milieu du segment $[AB]$.

On a les transformations vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)$$
$$=\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$$
$$=\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$$
$$=MI\times MI+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+\left(-IA\times IB\right)$$
$$=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\right)-IA\times IB$$
$$=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{0}-IA\times IA=MI^2+0-IA^2$$
$$=MI^2-IA^2$$

- Soit M un point de l'ensemble $\mathcal{E}$. Il vérifie la relation :
  $$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$
  $$MI^2-IA^2=0$$
  $$MI^2=IA^2$$
  MI et IA représentent des distances : ils sont positifs
  $$MI=IA$$
  Les trois points A, B, M sont équidistants du point I : ils appartiennent au même cercle de centre I et de rayon IA.

  Tout point de l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ appartient au cercle de diamètre $[\boldsymbol{AB}]$

- Soit M un point du cercle de diamètre $[AB]$. Le point I étant le centre de ce cercle, on a :
  $$IM=IA=IB$$
  $$MI=IA$$
  $$MI^2=IA^2$$
  $$MI^2-IA^2=0$$
  $$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$

  Tout point du cercle de diamètre $[\boldsymbol{AB}]$ est un point de l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{E}}$

Proposition :

Soit A et B deux points distincts du plan. L'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan vérifiant la relation :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$

est le cercle de diamètre $[AB]$.

Preuve :

Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$, soit $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points distincts du plan et :

$$\mathcal{E}=\left\{M \mid \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\right\}$$

Notons K le milieu du segment $[AB]$ et $M(x\,;y)$ un point quelconque de l'ensemble $\mathcal{E}$.

Le point K a pour coordonnées : $K\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$

On remarque :

- $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(x-x_A\right)\left(x-x_B\right)+\left(y-y_A\right)\left(y-y_B\right)$

$$=x^2-x\cdot x_B-x_A\cdot x+x_A\cdot x_B+y^2-y\cdot y_B-y_A\cdot y+y_A\cdot y_B$$
$$=\left[x^2-x\cdot\left(x_B+x_A\right)+x_A\cdot x_B\right]+\left[y^2-y\cdot\left(y_B+y_A\right)+y_A\cdot y_B\right]$$

- KM^2-KA^2

$$=\left[\sqrt{\left(x-x_K\right)^2+\left(y-y_K\right)^2}\right]^2-\left[\sqrt{\left(x_A-x_K\right)^2+\left(y_A-y_K\right)^2}\right]^2$$
$$=\left(x-x_K\right)^2+\left(y-y_K\right)^2-\left(x_A-x_K\right)^2-\left(y_A-y_K\right)^2$$
$$=\left[\left(x-x_K\right)^2-\left(x_A-x_K\right)^2\right]+\left[\left(y-y_K\right)^2-\left(y_A-y_K\right)^2\right]$$

On a les simplifications :

- $\left(x-x_K\right)^2-\left(x_A-x_K\right)^2$
  $$=\left[\left(x-x_K\right)+\left(x_A-x_K\right)\right]\left[\left(x-x_K\right)-\left(x_A-x_K\right)\right]$$
  $$=\left(x+x_A-2\cdot x_K\right)\left(x-x_A\right)$$
  $$=\left[x+x_A-\left(x_A+x_B\right)\right]\left(x-x_A\right)$$
  $$=\left(x-x_B\right)\left(x-x_A\right)=x^2-x\cdot\left(x_B+x_A\right)+x_A\cdot x_B$$
- De même, on montre :
  $$\left(y-y_K\right)^2-\left(y_A-y_K\right)^2=y^2-y\cdot\left(y_B+y_A\right)+y_A\cdot y_B$$

On en déduit les équivalences suivantes :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$
$$\Longleftrightarrow\left[x^2-x\cdot\left(x_B+x_A\right)+x_A\cdot x_B\right]+\left[y^2-y\cdot\left(y_B+y_A\right)+y_A\cdot y_B\right]=0$$
$$\Longleftrightarrow\left[\left(x-x_K\right)^2-\left(x_A-x_K\right)^2\right]+\left[\left(y-y_K\right)^2-\left(y_A-y_K\right)^2\right]=0$$
$$\Longleftrightarrow KM^2-KA^2=0$$
$$\Longleftrightarrow KM^2=KA^2$$
$$\Longleftrightarrow KM=KA$$

$\Longleftrightarrow$ A, B, M équidistant de K

$\Longleftrightarrow$ M appartient au cercle de diamètre $[AB]$

Corollaire :

- Si un triangle est inscrit dans un cercle et qu'un de ses côtés forment un diamètre alors ce triangle est rectangle et ce côté est son hypothénuse.
- Si un triangle est rectangle alors il est inscrit dans le cercle dont le diamètre est son hypothénuse.

Preuve :

- Soit AMC un triangle inscrit dans un cercle où le segment $[AB]$ est un diamètre de ce cercle.
  D'après la proposition précédente, le point M appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$. Le point M vérifie la propriété suivante :
  $$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$
  Les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ étant non-nuls, on en déduit que ces vecteurs sont orthogonaux : le triangle ABM est rectangle en M.
- Soit ABM un triangle rectangle en M. Les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ étant orthogonaux, on a :
  $$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$
  Ainsi, le point M appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.
  D'après la propriété précédénte, le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.