Proposition :

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonomé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $O(x_O\,;y_O)$ et de rayon r.
L'ensemble des points $M(\,x\,;y\,)$ du cercle $\mathscr{C}$ vérifie l'équation cartésienne :

$$x^2+y^2+\left(-2{\cdot}x_O\right){\cdot}x+\left(-2{\cdot}y_O\right){\cdot}y+\left({x_O}^2+{y_O}^2-r^2\right)=0$$

Preuve :

On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $O(x_O\,;y_O)$ et de rayon r et un point $M(x\,;y)$ appartenant à $\mathscr{C}$.

Le point M vérifie la définition d'un cercle :

$$\begin{aligned}
OM &= r\\
\sqrt{\left(x-x_O\right)^2+\left(y-y_O\right)^2} &= r\\
\left[\sqrt{\left(x-x_O\right)^2+\left(y-y_O\right)^2}\right]^2 &= r^2\\
\left(x-x_O\right)^2+\left(y-y_O\right)^2 &= r^2\\
x^2-2{\cdot}x{\cdot}x_O+{x_O}^2+y^2-2{\cdot}y{\cdot}y_O+{y_O}^2-r^2 &= 0\\
x^2+y^2+\left(-2{\cdot}x_O\right){\cdot}x+(-2{\cdot}y_O){\cdot}y+\left({x_O}^2+{y_O}^2-r^2\right) &= 0
\end{aligned}$$