Proposition : *(réciproque)*

Soit a, b, c trois nombres réels quelconques. Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x\,;y)$ vérifiant l'équation cartésienne :

$$x^2+y^2+a\cdot x+b\cdot y+c=0$$

- Si $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c<0$ alors l'ensemble $\mathcal{E}$ est vide.
- Si $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c=0$ alors l'ensemble $\mathcal{E}$ est un point.
- Si $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c>0$ alors l'ensemble $\mathcal{E}$ est un cercle.

Preuve :

Considérons l'équation ci-dessous où a, b, c sont trois nombres :

$$x^2+y^2+a\cdot x+b\cdot y+c=0$$

$$\left(x^2+a\cdot x\right)+\left(y^2+b\cdot y\right)=-c$$

$$\left[\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}\right]+\left[\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}\right]=-c$$

$$\textbf{(E)}\qquad \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$$

Etudions l'ensemble des solutions par une disjonction de cas sur le membre de droite de cette équation :

- Pour $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c\boldsymbol{<0}$:
  Tout point $M(x\,;y)$ vérifiant l'équation cartésienne (E) vérifie également l'inéquation cartésienne :
  $$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2<0$$
  Le carré d'un nombre étant positif ou nul, la somme de deux carrés est positive et nulle. On en déduit que cette inéquation n'admet aucune solution.
  Ainsi, l'ensemble $\mathcal{E}$ est vide.

- Pour $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c\boldsymbol{=0}$: l'équation (E) devient :
  $$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=0$$
  Le carré d'un nombre étant positive est nulle, la somme de deux carrés est nulle seulement si ses termes sont nuls. On en déduit le système :
  $$\begin{cases}\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=0\\ \left(y+\frac{b}{2}\right)^2=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x+\frac{a}{2}=0\\ y+\frac{b}{2}=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=-\frac{a}{2}\\ y=-\frac{b}{2}\end{cases}$$
  Ainsi, le point $M\left(-\frac{a}{2}\,;-\frac{b}{2}\right)$ est l'unique point de l'ensemble $\mathcal{E}$.

- Pour $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c>0$: notons $A\left(-\frac{a}{2}\,;-\frac{b}{2}\right)$, tout point $M(x\,;y)$ vérifiant l'équation cartésienne :
  $$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$$
  $$\left[x-\left(-\frac{a}{2}\right)\right]^2+\left[y-\left(-\frac{b}{2}\right)\right]^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$$
  $$\left(x-x_A\right)^2+\left(y-y_A\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$$
  $$AM^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$$
  $$AM=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$$
  Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$. On vient de montrer :
  - tout point M vérifiant l'équation (E) appartient au cercle $\mathscr{C}$
  - tout point M appartenant au cercle $\mathscr{C}$ vérifie l'équation (E).

  Ainsi, l'ensemble $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points du cercle $\mathscr{C}$.