Proposition :

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ orthonormé, on considère une droite (d) et a, b deux nombres réels.

- Si la droite (d) admet $a{\cdot}x+b{\cdot}y+c$, où $c\in\mathbb{R}$, pour équation cartésiene alors le vecteur $\overrightarrow{n}\,(a\,;b)$ est normal à la droite (d).
- Si le vecteur $\overrightarrow{n}\,(a\,;b)$ est normal à la droite (d) alors la droite (d) admet une équation cartésienne de la forme : $a{\cdot}x+b{\cdot}y+c=0 \quad$ où $c\in\mathbb{R}$.

Preuve :

- Soit (d) la droite appartenant l'équation cartésienne :
  $a{\cdot}x+b{\cdot}y+c=0 \quad$ où $a,b,c\in\mathbb{R}$
  Notons A et B les points de la droite (d) d'abscisse respective 0 et 1 :
  - Les coordonnées du point $A(0\,;y_A)$ vérifient l'équation cartésienne de la droite (d) :
    $$a{\cdot}x_A+b{\cdot}y_A+c=0 \qquad b{\cdot}y_A=-c$$
    $$a\times 0+b{\cdot}y_A+c=0 \qquad y_A=-\frac{c}{b}$$
    $$b{\cdot}y_A+c=0$$
  - De même, on montre que : $\quad B\Big(1\,;-\dfrac{a+c}{b}\Big)$

  Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (d) et a pour coordonnées :
  $$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A\,;y_B-y_A)=\Big(1-0\,;\Big(-\frac{a+c}{b}\Big)-\Big(-\frac{c}{b}\Big)\Big)$$
  $$=\Big(1\,;\frac{-a-c}{b}+\frac{c}{b}\Big)=\Big(1\,;\frac{-a-c+c}{b}\Big)=\Big(1\,;\frac{-a}{b}\Big)$$
  Du calcul : $\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n}=1\times a+\Big(\dfrac{-a}{b}\Big)\times b=a-a=0$
  On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(a\,;b)$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$: il est normal à la droite (d).
- La droite (d) admet une équation cartésienne de la forme : $\quad \alpha{\cdot}x+\beta{\cdot}y+c=0 \quad$ où $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$
  Effectuons une disjonction de cas sur la valeur de α
  - $\boldsymbol{\alpha\neq 0}$: la droite (d) admet une équation cartésienne de la forme :
    $a{\cdot}x+\beta'{\cdot}y+\gamma'=0 \quad$ où $\beta'\in\mathbb{R}^*$ et $\gamma'\in\mathbb{R}$
    Par une démarche similaire, on montre que les points A et B d'abscisses respectives 0 et 1 ont pour coordonnées :
    $$A\Big(0\,;-\frac{\gamma'}{\beta'}\Big)\ ;\ B\Big(1\,;-\frac{a+\gamma'}{\beta'}\Big) \implies \overrightarrow{AB}\Big(1\,;-\frac{a}{\beta'}\Big)$$
    Le vecteur $\overrightarrow{n}$ étant normal à la droite (d), les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux :
    $$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$
    $$a\times 1+b\times\Big(-\frac{a}{\beta'}\Big)=0$$
    $$a\times\beta'-a\times b=0$$
    $$a{\cdot}(\beta'-b)=0$$
    Le nombre a étant non-nul, on en déduit que $\beta'=b$.
    Ainsi, la droite (d) admet une équation cartésienne de la forme :
    $a{\cdot}x+b{\cdot}y+\gamma'=0 \quad$ où $\gamma'\in\mathbb{R}$
  - $\boldsymbol{\alpha=0}$: une équation cartésienne de (d) est :
    $\beta{\cdot}y+\gamma=0 \quad$ où $\beta\in\mathbb{R}^*$ et $\gamma\in\mathbb{R}$
    On montre que $\overrightarrow{u}\,(0\,;1)$ est un vecteur directeur, puis par orthogonalité de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ et ainsi que $a=0$