Proposition :

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère une droite (d) et a, b deux nombres réels.

- Si la droite (d) admet $a{\cdot}x+b{\cdot}y+c$, où $c\in\mathbb{R}$, pour équation cartésiene alors le vecteur $\overrightarrow{n}(a\,;b)$ est normal à la droite (d).
- Si le vecteur $\overrightarrow{n}(a\,;b)$ est normal à la droite (d) alors la droite (d) admet une équation cartésienne de la forme : $a{\cdot}x+b{\cdot}y+c=0 \quad$ où $c\in\mathbb{R}$.

Preuve :

- Soit (d) la droite appartenant l'équation cartésienne :
  $$a{\cdot}x+b{\cdot}y+c=0 \quad \text{où } a,b,c\in\mathbb{R}$$
  Le vecteur $\overrightarrow{u}(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de la droite (d). On remarque :
  $$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n} = -b\times a+a\times b=0$$
  Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u}$.
  Le vecteur $\overrightarrow{u}$ étant un vecteur directeur de la droite (d), on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à la droite (d).
- La droite (d) admet une équation cartésienne de la forme :
  $$\alpha{\cdot}x+\beta{\cdot}y+\gamma=0 \quad \text{où } \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$$
  Le vecteur $\overrightarrow{u}(-\beta\,;\alpha)$ est un vecteur directeur de la droite (d).
  Le vecteur $\overrightarrow{n}$ étant normal à la droite (d), on en déduit qu'il est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u}$.
  Ainsi, on a : $\quad \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}=0$

  Effectuons une disjonction de cas sur α :

  - $\boldsymbol{\alpha=0}$:
    $$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}=0 \implies -\beta\times a+0\times b=0 \implies -\beta\times a=0$$
    Le nombre β étant non-nul, on en déduit que $a=0$.
    Ainsi : $\overrightarrow{n}(0\,;b) \quad$ où $b\neq0$.
    La droite (d) admet pour équation :
    $$\beta{\cdot}y+\gamma=0 \qquad b{\cdot}y+c'=0$$
    $$\frac{b}{\beta}\cdot\beta{\cdot}y+\frac{b}{\beta}\cdot\gamma=0 \qquad a{\cdot}x+b{\cdot}y+c'=0 \quad \text{où } c'\in\mathbb{R}$$
  - $\boldsymbol{\alpha\neq0}$:
    $$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}=0$$
    $$-\beta\cdot a+\alpha\cdot b=0$$
    $$-\beta\cdot a+\alpha\cdot b=0$$
    $$-\beta\cdot a=-\alpha\cdot b$$
    $$\beta=\frac{-\alpha\cdot b}{-a}$$
    $$\beta=\frac{\alpha\cdot b}{a}$$
    Cette dernière relation, montre que α ne peut être nul, sinon le vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ serait le vecteur nul *(ce qui est absurde)*.
    La droite (d) admet pour équation :
    $$\alpha{\cdot}x+\beta{\cdot}y+\gamma=0$$
    $$\alpha{\cdot}x+\frac{\alpha\cdot b}{a}{\cdot}y+\gamma=0$$
    $$a{\cdot}\alpha{\cdot}x+\alpha\cdot b{\cdot}y+\gamma=0$$
    $$\alpha{\cdot}\Big(a{\cdot}x+b{\cdot}y+\frac{\gamma}{\alpha}\Big)=0$$
    Le nombre α étant non-nul :
    $$a{\cdot}x+b{\cdot}y+\frac{\gamma}{\alpha}=0$$
    $$a{\cdot}x+b{\cdot}y+c=0$$