Produit scalaire

A. Définition:

Définition:

Dans le plan, on considère une droite (d) et un point M du plan. On appelle **projeté du point M sur la droite (d)** l'unique point H intersection de la droite (d) et de la perpendiculaire à la droite (d) passant par le point M.

Remarque:

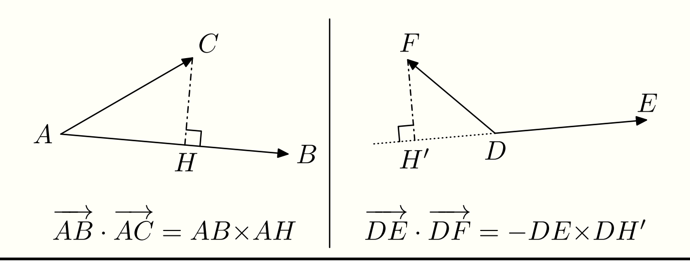
La définition précédente propose également l'unicité du projeté qui s'établir facilement car deux droites perpendiculaires *(donc sécantes)* n'ont qu'un point d'intersection dans le plan.

Définition:

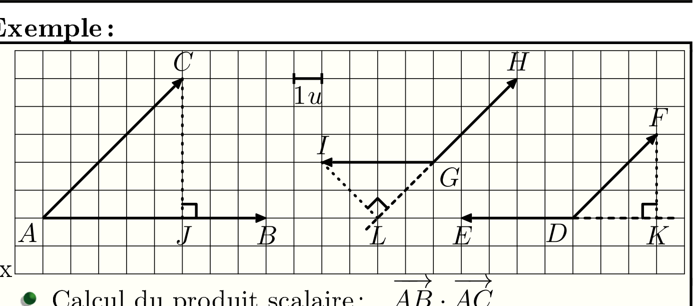
Dans le plan, on considère trois point A, B, C *(on suppose B distinct de A)*. On note H le projeté du point C sur la droite (AB). On définit le **produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$** comme le nombre défini par:

- $AB\times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens
- $-AB\times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens opposés.

On note ce nombre $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$



Exemple:



- Calcul du produit scalaire: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

  Notons J le projeté du point C sur la droite (AB). Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires et de même sens. On a:

  $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AJ=8\times 5=40$
- Calcul du produit scalaire: $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}$

  Notons K le projeté du point F sur la droite (DE). Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DK}$ sont colinéaires et de même sens. On a:

  $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=-DE\times DK=-4\times 3=-12$
- Calcul du produit scalaire: $\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GI}$

  Notons L le projeté du point I sur la droite (GU). Les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont colinéaires et de même sens. On a:

  $$\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GI}=-GH\times GL=-\big(3\sqrt{2}\big)\times\big(2\sqrt{2}\big)$$
  $$=-6\times\big(\sqrt{2}\big)=-12$$

Proposition: *(propriété immédiate)*

Dans le plan, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non-nuls.

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires:
  - et de même sens alors: $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|$
  - et de sens contraire alors: $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|$
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux alors: $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$

Preuve:

r484-0

B. Expression par le cosinus:

Proposition:

Pour tout points A, B, C du plan, le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ admet pour expression:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$$

Preuve:

r486-0

Corollaire:

Soit A, B, C trois points distincts deux à deux. On a:

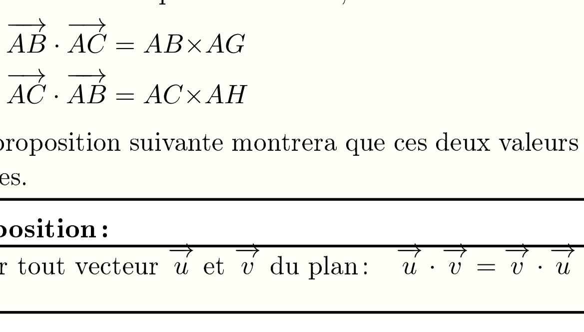
$$\cos\widehat{BAC}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$$

C. Propriété:

1. Symétrie:

Remarque:

Considérons les trois points A, B, C représentés ci-dessous:



Notons H le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) et G le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

Par définition du produit scalaire, on a:

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AG$
- $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=AC\times AH$

La proposition suivante montrera que ces deux valeurs sont égales.

Proposition:

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan: $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$

Preuve:

r481-0

Exemple:

Exercice

2. Bilinéarité:

Lemme:

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non-nuls du plan. Le vecteur $\overrightarrow{v}$ admet une et une unique décomposition:

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$$

où $\overrightarrow{v_1}$ est un vecteur colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v_2}$ est un vecteur orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u}$.

Proposition: *(distributivité du produit scalaire sur la somme)*

Considérons trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, on a:

$$\overrightarrow{u}\cdot\big(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\big)=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$$

Preuve:

r482-0

Proposition: *(associativité par la multiplication par un scalaire)*

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan et λ un nombre réel:

$$\big(\lambda\cdot\overrightarrow{u}\big)\cdot\overrightarrow{v}=\lambda\times\big(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\big)$$

Preuve:

r482-1

3. Positivité:

Proposition:

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur dans le plan. On a:

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=\|\overrightarrow{u}\|^2$$

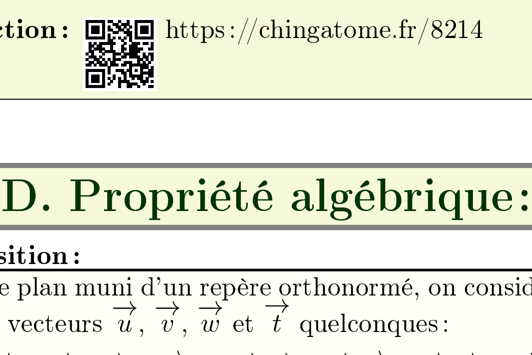
Remarque:

- la preuve se trouve ici: r490-0
- Pour simplification de l'écriture des opérations sur le produit scalaire, on note: $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}^2$

4. Application:

Exercice

On considère le trapèze $ABCD$ représenté ci-dessous:



où: $AC=2\,cm$; $CD=3\,cm$

Déterminer la longueur x du segment $[AB]$ afin que les diagonales, $[AD]$ et $[BC]$, du trapèze $ABCD$ soient perpendiculaires.

correction: https://chingatome.fr/8214

D. Propriété algébrique:

Proposition:

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les quatre vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$ quelconques:

- $\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)\big(\overrightarrow{w}+\overrightarrow{t}\big)=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{t}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{t}$
- $\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2$
- $\big(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\big)^2=\|\overrightarrow{u}\|^2-2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2$
- $\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)\cdot\big(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\big)=\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2$

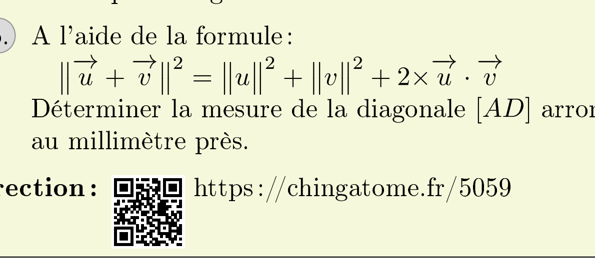
Preuve:

r703-0

Exercice

On considère le triangle ABC tels que:

$AB=2\,cm$; $AC=6\,cm$; $BC=7\,cm$



1. A l'aide de la formule:
   $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
   Déterminer la valeur du produit scalaire: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
2. a. Placer le point D tel que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

   b. A l'aide de la formule:
   $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2+2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
   Déterminer la mesure de la diagonale $[AD]$ arrondie au millimètre près.

correction: https://chingatome.fr/5059

Corollaire:

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On a:

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]$$

Remarque:

Cette dernière expression du produit scalaire ne fait intervenir que des distances dans le plan sans l'utilisation du projeté d'un point.

E. Formule d'Al-Kashi:

Al kashi = loi des cosinus = th pythagore généralisé

Propriété:

Dans un triangle ABC, on a les relations suivantes:

- $AB^2=AC^2+BC^2-2\times AC\times BC\times\cos\widehat{ACB}$

- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\times AB\times BC\times \cos\widehat{ABC}$
- $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\times AC\times AB\times \cos\widehat{BAC}$

Preuve :

r706-0

Remarque :

Ces relations métriques portent également le nom :

- loi des cosinus
- ou théorème de Pythagore généralisé

Leur démonstration est rapide lorsqu'on a le produit scalaire et ses propriétés algébriques. Historiquement, ces formules ont été prouvées à partir de relations sur les aires.

Exercice

On considère le triangle ABC dont les mesures sont :

$AB = 5{,}5\,cm \quad ; \quad AC = 6{,}2\,cm \quad ; \quad BC = 4{,}7\,cm$

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degrès près.

correction : https://chingatome.fr/7850

Exercice

On considère un triangle ABC vérifiant les mesures :

$AB = 5\,cm \quad ; \quad AC = 3\,cm \quad ; \quad \widehat{ABC} = 30^o$

Déterminer les mesures possibles du segment BC réalisant ces conditions. *(on donnera ces mesures au millimètre près)*

correction : https://chingatome.fr/8529

F. Expression analytique :

Proposition :

On considère le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ et deux vecteurs $\overrightarrow{u}\,(x\,;y)$ et $\overrightarrow{v}\,(x'\,;y')$. On a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = x\times x' + y\times y'$$

Preuve :

r493-0

Exercice

Dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on considère les deux points $A(-2\,;3)$ et $B(4\,;-1)$ et un point C tel que :

- le point C ait pour abscisse 3.
- le triangle ABC est rectangle en B.

Déterminer les coordonnées du point C.

correction : https://chingatome.fr/8432

Corollaire :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, considérons deux vecteurs $\overrightarrow{u}\,(x\,;y)$ et $\overrightarrow{v}\,(x'\,;y')$ non-nuls. Notons α l'angle formé entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On a :

$$\cos\big(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\big) = \frac{x\times x' + y\times y'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Preuve :

r164-0

Exercice

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$.

Déterminer une mesure de l'angle orienté $\widehat{EDF}$ où $D(3\,;5)$, $E(-1\,;0)$, $F(2\,;4)$ au centième de degré près.

correction : https://chingatome.fr/2593

