Proposition :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les quatre vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$ quelconques :

- $\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)\big(\overrightarrow{w}+\overrightarrow{t}\big)=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{t}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{t}$
- $\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2$
- $\big(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\big)^2=\|\overrightarrow{u}\|^2-2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2$
- $\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)\cdot\big(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\big)=\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2$

Preuve :

- Le produit scalaire est une opération distributive sur la somme des vecteurs.
  Cette propriété se traduit en français par la phrase "*le produit scalaire de la somme des vecteurs est égale à la somme des produits scalaires des vecteurs*" et s'écrit mathématiquement pour trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ par la relation :
  $$\overrightarrow{u}\cdot\big(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\big)=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$$
  Etablissons la formule de double distributivié pour les quatre vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$:
  $$\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)\cdot\big(\overrightarrow{w}+\overrightarrow{t}\big)$$
  Utilisons la distributivié du premier facteur sur la somme des termes du second facteur :
  $$=\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)\cdot\overrightarrow{w}+\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)\cdot\overrightarrow{t}$$
  Utilisons par deux fois la distributivité :
  $$=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{t}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{t}$$
  Réorganisons les termes pour établir la formule :
  $$=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{t}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{t}$$

Utilisons la double distributivité pour établir les trois identités suivantes :

- $$\begin{aligned}\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)^2&=\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)\\&=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}\\&=\overrightarrow{u}^2+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2\\&=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\cdot\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\big(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\big)^2&=\big(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\big)\big(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\big)\\&=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}\\&=\overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2\\&=\|\overrightarrow{u}\|^2-2\cdot\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2\end{aligned}$$
- $\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)\big(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\big)=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}$

$$=\overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v}^2=\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2$$

Proposition :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les quatre vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$ quelconques :

- $\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)\big(\overrightarrow{w}+\overrightarrow{t}\big)=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{t}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{t}$
- $\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2$
- $\big(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\big)^2=\|\overrightarrow{u}\|^2-2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2$
- $\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)\cdot\big(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\big)=\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2$

Preuve :

- Le produit scalaire est une opération distributive sur la somme des vecteurs.
  Cette propriété se traduit en français par la phrase "*le produit scalaire de la somme des vecteurs est égale à la somme des produits scalaires des vecteurs*" et s'écrit mathématiquement pour trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ par la relation :
  $$\overrightarrow{u}\cdot\big(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\big)=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$$
  Etablissons la formule de double distributivié pour les quatre vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$:
  $$\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)\cdot\big(\overrightarrow{w}+\overrightarrow{t}\big)$$
  Utilisons la distributivié du premier facteur sur la somme des termes du second facteur :
  $$=\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)\cdot\overrightarrow{w}+\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)\cdot\overrightarrow{t}$$
  Utilisons par deux fois la distributivité :
  $$=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{t}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{t}$$
  Réorganisons les termes pour établir la formule :
  $$=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{t}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{t}$$

Utilisons la double distributivité pour établir les trois identités suivantes :

- $$\begin{aligned}\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)^2&=\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)\\&=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}\\&=\overrightarrow{u}^2+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2\\&=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\cdot\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\big(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\big)^2&=\big(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\big)\big(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\big)\\&=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}\\&=\overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2\\&=\|\overrightarrow{u}\|^2-2\cdot\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2\end{aligned}$$
- $\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)\big(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\big)=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}$

$$=\overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v}^2=\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2$$

Corollaire :

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]$$

Preuve :

De la proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2&=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2\\2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\\\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]\end{aligned}$$

Corollaire :

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]$$

Preuve :

De la proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2&=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2\\2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\\\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]\end{aligned}$$

Corollaire :

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]$$

Preuve :

De la proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2&=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2\\2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\\\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]\end{aligned}$$

Corollaire :

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]$$

Preuve :

De la proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2&=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2\\2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\\\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]\end{aligned}$$

Corollaire :

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]$$

Preuve :

De la proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2&=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2\\2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\\\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]\end{aligned}$$

Corollaire :

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]$$

Preuve :

De la proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2&=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2\\2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\\\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]\end{aligned}$$

Corollaire :

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]$$

Preuve :

De la proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2&=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2\\2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\\\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]\end{aligned}$$

Corollaire :

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]$$

Preuve :

De la proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2&=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2\\2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\\\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]\end{aligned}$$

Corollaire :

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]$$

Preuve :

De la proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2&=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2\\2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\\\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]\end{aligned}$$

Corollaire :

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]$$

Preuve :

De la proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2&=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2\\2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\\\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\Big]\end{aligned}$$