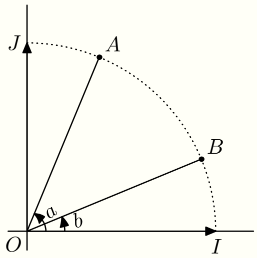
Proposition :

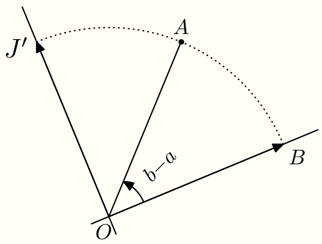
Soit a et b deux nombres réels quelconque. On a les identités :

- $\sin\big(a{-}b\big) = \sin a\cdot\cos b - \cos a\cdot\sin b$
- $\sin\big(a{+}b\big) = \sin a\cdot\cos b + \cos a\cdot\sin b$
- $\cos\big(a{-}b\big) = \cos a\cdot\cos b + \sin a\cdot\sin b$
- $\cos\big(a{+}b\big) = \cos a\cdot\cos b - \sin a\cdot\sin b$

Preuve :

On ne démontrera dans cette preuve que les deux formules liées à $\cos\big(a{-}b\big)$ et $\sin\big(a{-}b\big)$. Les deux autres formules se démontrent de manière équivalente.





On considère le plan muni d'un repère orthonormé $\big(O\,;I\,;J\big)$ et on note $\mathscr{C}$ son cercle trigonométrique.

- On considère deux points A et B du cercle trigonométrique. On note :
  $a = \big(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OA}\big)$; $b = \big(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OB}\big)$

  Dans le repère cartésien $\big(O\,;I\,;J\big)$, ces deux points ont pour coordonnées :
  $A(\cos a\,;\sin a)$; $B(\cos b\,;\sin b)$

  Le point O étant l'origine du repère, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ont les mêmes coordonnées. On en déduit la valeur du produit scalaire :
  $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \cos\big(a\big)\cdot\cos\big(b\big) + \sin\big(a\big)\cdot\sin\big(b\big)$
- Considérons le repère $\big(O\,;\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OJ'}\big)$ orthonormé orienté dans le sens direct. Voici la représentation de ce repère :

  Les points A et B ont pour coordonnées :
  $A(1\,;0)$; $B\big(\cos\big(a{-}b\big)\,;\sin\big(a{-}b\big)\big)$

  On en déduit la valeur du produit scalaire :
  $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 1\cdot\cos\big(a{-}b\big) + 0\cdot\sin\big(a{-}b\big) = \cos\big(a{-}b\big)$
- La valeur du produit scalaire de deux vecteurs exprimés dans deux repère orthonormaux de même norme, on en déduit l'égalité :
  $\cos\big(a\big)\cdot\cos\big(b\big) + \sin\big(a\big)\cdot\sin\big(b\big) = \cos\big(a{-}b\big)$

Proposition :

Pour tout réel a quelconque, on a les relations :

- $\cos\big(2{\cdot}a\big) = \big(\cos a\big)^2 - \big(\sin a\big)^2$
- $\sin\big(2{\cdot}a\big) = 2\cdot\cos a\cdot\sin a$

Proposition :

Les formules d'addition des fonctions trigonométriques permettent d'écrire pour tout nombre réel a :

- $\cos\big(a{+}b\big) = \cos\big(a\big)\cdot\cos\big(a\big) - \sin\big(a\big)\cdot\sin\big(a\big)$
  $= \big(\cos a\big)^2 + \big(\sin a\big)^2$
- $\sin\big(a{+}b\big) = \sin\big(a\big)\cdot\cos\big(a\big) + \cos\big(a\big)\cdot\sin\big(a\big)$
  $= 2\cdot\sin\big(a\big)\cdot\cos\big(a\big)$

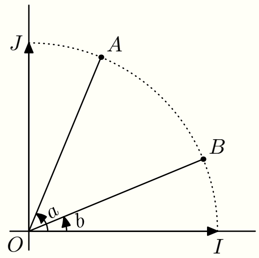
Proposition :

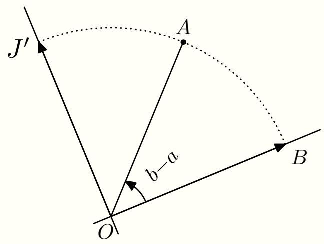
Soit a et b deux nombres réels quelconque. On a les identités :

- $\sin\big(a{-}b\big) = \sin a\cdot\cos b - \cos a\cdot\sin b$
- $\sin\big(a{+}b\big) = \sin a\cdot\cos b + \cos a\cdot\sin b$
- $\cos\big(a{-}b\big) = \cos a\cdot\cos b + \sin a\cdot\sin b$
- $\cos\big(a{+}b\big) = \cos a\cdot\cos b - \sin a\cdot\sin b$

Preuve :

On ne démontrera dans cette preuve que les deux formules liées à $\cos\big(a{-}b\big)$ et $\sin\big(a{-}b\big)$. Les deux autres formules se démontrent de manière équivalente.





On considère le plan muni d'un repère orthonormé $\big(O\,;I\,;J\big)$ et on note $\mathscr{C}$ son cercle trigonométrique.

- On considère deux points A et B du cercle trigonométrique. On note :
  $a = \big(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OA}\big)$; $b = \big(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OB}\big)$

  Dans le repère cartésien $\big(O\,;I\,;J\big)$, ces deux points ont pour coordonnées :
  $A(\cos a\,;\sin a)$; $B(\cos b\,;\sin b)$

  Le point O étant l'origine du repère, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ont les mêmes coordonnées. On en déduit la valeur du produit scalaire :
  $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \cos\big(a\big)\cdot\cos\big(b\big) + \sin\big(a\big)\cdot\sin\big(b\big)$
- Considérons le repère $\big(O\,;\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OJ'}\big)$ orthonormé orienté dans le sens direct. Voici la représentation de ce repère :

  Les points A et B ont pour coordonnées :
  $A(1\,;0)$; $B\big(\cos\big(a{-}b\big)\,;\sin\big(a{-}b\big)\big)$

  On en déduit la valeur du produit scalaire :
  $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 1\cdot\cos\big(a{-}b\big) + 0\cdot\sin\big(a{-}b\big) = \cos\big(a{-}b\big)$
- La valeur du produit scalaire de deux vecteurs exprimés dans deux repère orthonormaux de même norme, on en déduit l'égalité :
  $\cos\big(a\big)\cdot\cos\big(b\big) + \sin\big(a\big)\cdot\sin\big(b\big) = \cos\big(a{-}b\big)$

Proposition :

Pour tout réel a quelconque, on a les relations :

- $\cos\big(2{\cdot}a\big) = \big(\cos a\big)^2 - \big(\sin a\big)^2$
- $\sin\big(2{\cdot}a\big) = 2\cdot\cos a\cdot\sin a$

Proposition :

Les formules d'addition des fonctions trigonométriques permettent d'écrire pour tout nombre réel a :

- $\cos\big(a{+}b\big) = \cos\big(a\big)\cdot\cos\big(a\big) - \sin\big(a\big)\cdot\sin\big(a\big)$
  $= \big(\cos a\big)^2 + \big(\sin a\big)^2$
- $\sin\big(a{+}b\big) = \sin\big(a\big)\cdot\cos\big(a\big) + \cos\big(a\big)\cdot\sin\big(a\big)$
  $= 2\cdot\sin\big(a\big)\cdot\cos\big(a\big)$