Proposition :

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère un point $A(\alpha\,;\beta)$ et la droite (d) d'équation cartésienne :

$$a{\cdot}x+b{\cdot}y+c=0 \quad a,b,c\in\mathbb{R}$$

Le point M projeté orthogonal du point A sur la droite (d) a pour coordonnées :

$$M\left(\frac{b^2{\cdot}\alpha-a{\cdot}c-a{\cdot}b{\cdot}\beta}{a^2+b^2}\,;\frac{a^2{\cdot}\beta-b{\cdot}c-a{\cdot}b{\cdot}\alpha}{a^2+b^2}\right)$$

Preuve :

Effectuons une disjonction de cas sur la valeur de a :

- $\boldsymbol{a\neq 0}$
  - Puisque $M\in(d)$, ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de la droite (d) :

$$a{\cdot}x_M+b{\cdot}y_M+c=0 \quad\Longrightarrow\quad a{\cdot}x_M=-b{\cdot}y_M-c$$
$$\Longrightarrow x_M=-\frac{b}{a}{\cdot}y_M-\frac{c}{a}$$

  - Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{AM}(x_M-\alpha\,;y_M-\beta)$.

    La droite (d) admet le vecteur $\overrightarrow{u}(-b\,;a)$ pour vecteur directeur. Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ étant orthogonaux, on a :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{u}=0$$
$$\big(x_M-\alpha\big)\big(-b\big)+\big(y_M-\beta\big){\cdot}a=0$$
$$\Big(-\frac{b}{a}{\cdot}y_M-\frac{c}{a}-\alpha\Big)\big(-b\big)+\big(y_M-\beta\big){\cdot}a=0$$

$\Big(\frac{b^2}{a}+a\Big){\cdot}y_M=a{\cdot}\beta-\frac{b{\cdot}c}{a}-b{\cdot}\alpha$	$y_M=\Big(a{\cdot}\beta-\frac{b{\cdot}c}{a}-b{\cdot}\alpha\Big){\cdot}\frac{a}{a^2+b^2}$
$\frac{a^2+b^2}{a}{\cdot}y_M=a{\cdot}\beta-\frac{b{\cdot}c}{a}-b{\cdot}\alpha$	$y_M=\frac{a^2{\cdot}\beta-b{\cdot}c-a{\cdot}b{\cdot}\alpha}{a^2+b^2}$

  - On en déduit la valeur de x_M :

$$x_M=-\frac{b}{a}{\cdot}y_M-\frac{c}{a}=-\frac{b}{a}{\cdot}\Big(\frac{a^2{\cdot}\beta-b{\cdot}c-a{\cdot}b{\cdot}\alpha}{a^2+b^2}\Big)-\frac{c}{a}$$
$$=\frac{-\frac{b}{a}\Big(a^2{\cdot}\beta-b{\cdot}c-a{\cdot}b{\cdot}\alpha\Big)-\frac{c}{a}\big(a^2+b^2\big)}{a^2+b^2}$$
$$=\frac{-a{\cdot}b{\cdot}\beta+\frac{b^2{\cdot}c}{a}+b^2{\cdot}\alpha-a{\cdot}c-\frac{b^2{\cdot}c}{a}}{a^2+b^2}=\frac{b^2{\cdot}\alpha-a{\cdot}c-a{\cdot}b{\cdot}\beta}{a^2+b^2}$$

  Le point M a pour coordonnées :

$$M\left(\frac{b^2{\cdot}\alpha-a{\cdot}c-a{\cdot}b{\cdot}\beta}{a^2+b^2}\,;\frac{a^2{\cdot}\beta-b{\cdot}c-a{\cdot}b{\cdot}\alpha}{a^2+b^2}\right)$$

- $\boldsymbol{\alpha=0}$: b ne peut être nul

  L'appartenance du point M a la droite (d) donne :

$$a{\cdot}x_M+b{\cdot}y_M+c=0 \quad\Longrightarrow\quad y_M=-\frac{c}{b}$$

  Le vecteur $\overrightarrow{u}(-b\,;a)$, directeur de la droite (d), est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{u}=0$$ Le facteur b étant

$$\big(x_M-\alpha\big)\big(-b\big)+\big(y_M-\beta\big){\cdot}a=0$$
$$\big(x_M-\alpha\big)\big(-b\big)+0=0$$

  non-nul :

$$x_M-\alpha=0 \quad\Longrightarrow\quad x_M=\alpha$$

  Le point M a pour coordonnées $M\Big(\alpha\,;-\frac{c}{b}\Big)$ qui, puisque $\alpha=0$, peut aussi s'exprimer par :

$$M\left(\frac{b^2{\cdot}\alpha-a{\cdot}c-a{\cdot}b{\cdot}\beta}{a^2+b^2}\,;\frac{a^2{\cdot}\beta-b{\cdot}c-a{\cdot}b{\cdot}\alpha}{a^2+b^2}\right)$$