Proposition :

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère un point $A(\alpha\,;\beta)$ et la droite (d) d'équation cartésienne : $a{\cdot}x+b{\cdot}y+c=0 \quad a,b,c\in\mathbb{R}$

Le point H projeté orthogonal du point A sur la droite (d) a pour coordonnées :

$$H\left(\frac{b^2{\cdot}\alpha-a{\cdot}c-a{\cdot}b{\cdot}\beta}{a^2+b^2}\,;\frac{a^2{\cdot}\beta-b{\cdot}c-a{\cdot}b{\cdot}\alpha}{a^2+b^2}\right)$$

Preuve :

Pour tout point M de la droite (d), le point H est l'unique point minimisant la distance AM.

Soit $M(x\,;y)$, un point quelconque de la droite (d).

Effectuons une disjonction de cas sur la valeur de a.

- $\boldsymbol{b\neq 0}$: les coordonnées du point M vérifient l'équation cartésienne de la droite (d). Ainsi, on a :

$$a{\cdot}x+b{\cdot}y+c=0 \implies b{\cdot}y=-a{\cdot}x-c$$
$$\implies x=-\frac{a}{b}{\cdot}x-\frac{c}{b}$$

La distance AM s'exprime par :

$$AM=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\sqrt{(x-\alpha)^2+\left[\left(-\frac{a}{b}{\cdot}x-\frac{c}{b}\right)-\beta\right]^2}$$
$$=\sqrt{(x-\alpha)^2+\left(-\frac{a}{b}{\cdot}x-\frac{c}{b}-\beta\right)^2}$$

Le point H minimisant la distance AM, il minimise aussi AM^2. Nous allons étudier la fonction f qui associe à l'abscisse de tout point M de (d) le carré de la distance AM.

Puisque $b\neq 0$, la droite (d) est non-parallèle à l'axe des ordonnées et La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(x-\alpha)^2+\left(-\frac{a}{b}{\cdot}x-\frac{c}{b}-\beta\right)^2$$

Pour déterminer le minimum de la fonction f, nous allons déterminer sa dérivée et étudier son signe :

$$f'(x)=2{\cdot}(x-\alpha)+2\times\left(-\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{a}{b}{\cdot}x-\frac{c}{b}-\beta\right)$$
$$=2{\cdot}x-2{\cdot}\alpha+2\times\frac{a^2}{b^2}{\cdot}x+2\times\frac{a{\cdot}c}{b^2}+2\times\frac{a{\cdot}\beta}{b}$$
$$=2{\cdot}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right){\cdot}x+2{\cdot}\left(\frac{a{\cdot}c}{b^2}+\frac{a{\cdot}\beta}{b}-\alpha\right)$$
$$=2{\cdot}\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right){\cdot}x+2{\cdot}\left(\frac{a{\cdot}c}{b^2}+\frac{a{\cdot}\beta}{b}-\alpha\right)$$

Résolvons l'équation :

$$f'(x)=0$$
$$2{\cdot}\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right){\cdot}x+2{\cdot}\left(\frac{a{\cdot}c}{b^2}+\frac{a{\cdot}\beta}{b}-\alpha\right)=0$$
$$2{\cdot}\left[\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right){\cdot}x+\left(\frac{a{\cdot}c}{b^2}+\frac{a{\cdot}\beta}{b}-\alpha\right)\right]=0$$
$$\frac{a^2+b^2}{b^2}{\cdot}x+\left(\frac{a{\cdot}c}{b^2}+\frac{a{\cdot}\beta}{b}-\alpha\right)=0$$
$$\frac{a^2+b^2}{b^2}{\cdot}x=\alpha-\frac{a{\cdot}c}{b^2}-\frac{a{\cdot}\beta}{b}$$
$$x=\left(\alpha-\frac{a{\cdot}c}{b^2}-\frac{a{\cdot}\beta}{b}\right){\cdot}\frac{b^2}{a^2+b^2}$$
$$x=\frac{\alpha{\cdot}b^2-a{\cdot}c-a{\cdot}b{\cdot}\beta}{a^2+b^2}$$

La fonction f' admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{\alpha\cdot b^2-a\cdot c-a\cdot b\cdot\beta}{a^2+b^2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

La fonction f admet le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\frac{\alpha\cdot b^2-a\cdot c-a\cdot b\cdot\beta}{a^2+b^2}$		$+\infty$
Variation de f		$\searrow$		$\nearrow$	

On vient d'établir que la fonction f admet un minimum pour : $x=\dfrac{\alpha{\cdot}b^2-a{\cdot}c-a{\cdot}b{\cdot}\beta}{a^2+b^2}$

L'abscisse du point H est : $x_H=\dfrac{\alpha{\cdot}b^2-a{\cdot}c-a{\cdot}b{\cdot}\beta}{a^2+b^2}$

Déterminons l'ordonnée du point H. Le point H appartenant à la droite (d), on a :

$$a{\cdot}x_H+b{\cdot}y_H+c=0$$
$$b{\cdot}y_H=-a{\cdot}x_H-c$$
$$y_H=-\frac{a}{b}{\cdot}x_H-\frac{c}{b}$$
$$y_H=-\frac{a}{b}{\cdot}\frac{\alpha{\cdot}b^2-a{\cdot}c-a{\cdot}b{\cdot}\beta}{a^2+b^2}-\frac{c}{b}$$
$$y_H=\frac{-\frac{a}{b}{\cdot}\left(\alpha{\cdot}b^2-a{\cdot}c-a{\cdot}b{\cdot}\beta\right)-\frac{c}{b}{\cdot}(a^2+b^2)}{a^2+b^2}$$
$$y_H=\frac{-a{\cdot}b{\cdot}\alpha+\frac{a^2{\cdot}c}{b}+a^2{\cdot}\beta-\frac{a^2{\cdot}c}{b}-b{\cdot}c}{a^2+b^2}$$
$$y_H=\frac{a^2{\cdot}\beta-a{\cdot}b{\cdot}\alpha-b{\cdot}c}{a^2+b^2}$$

Le point H a pour coordonnées :

$$H\left(\frac{\alpha{\cdot}b^2-a{\cdot}c-a{\cdot}b{\cdot}\beta}{a^2+b^2}\,;\frac{a^2{\cdot}\beta-a{\cdot}b{\cdot}\alpha-b{\cdot}c}{a^2+b^2}\right)$$

- $\boldsymbol{b=0}$

Le point $M(x\,;y)$ appartenant à la droite (d), ses coordonnées vérifient son équation cartésienne :

$$a{\cdot}x+b{\cdot}y+c=0 \implies a{\cdot}x+0+c=0$$
$$\implies a{\cdot}x=-c \implies x=-\frac{c}{a}$$

Ainsi, la distance AM s'exprime par :

$$AM=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\sqrt{\left[\left(-\frac{c}{a}\right)-\alpha\right]^2+(y-\beta)^2}$$
$$=\sqrt{\left(-\frac{c}{a}-\alpha\right)^2+(y-\beta)^2}$$

Pour rechercher l'ordonnée du point M minimisant la distance AM, nous allons minimiser AM^2 et rechercher le minimun de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x-\beta)^2+\left(-\dfrac{c}{a}-\alpha\right)^2$

Cette fonction du second degré, exprimé sous sa forme canonique, admet un minimum pour $x=\beta$.

On en déduit : $H\left(-\dfrac{c}{a}\,;\beta\right)$

Puisque $b=0$, les coordonnées du point H admettent également l'expression :

$$H\left(\frac{b^2{\cdot}\alpha-a{\cdot}c-a{\cdot}b{\cdot}\beta}{a^2+b^2}\,;\frac{a^2{\cdot}\beta-b{\cdot}c-a{\cdot}b{\cdot}\alpha}{a^2+b^2}\right)$$