A la suite - Partie A

Exercice 1

Un globe-trotter a parié de parcourir 5 000 km à pied.
Il peut, frais et dispos, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1 % tous les jours.

On note u_0 la distance parcourue le premier jour de course et de manière générale u_n le $n^{\text{ème}}$ jour de course.

1. a. Donner la valeur des termes u_0, u_1, u_2.

   b. Déterminer la distance parcourue le $30^{\text{ème}}$ jour de course arrondie au mètre près.

2. Pour déterminer la distance parcourue après 45 jours de course, nous allons utiliser une feuille de calcul automatisée :

   a. Recopier et compléter la feuille de calcul ci-dessous jusqu'à la colonne `AY`.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Jour de course	1	2	3	4	5	6	7
2	Distance parcourue *(en km)*							
3								

   b. Quelle formule doit-on saisir dans la cellule `B2` afin d'être recopiée vers la droite et que la plage de cellules `B2:AT2` représentent les distances des 45 premiers jours de course.

   c. Donner la valeur approchée, au mètre près, de la distance parcourue par le coureur sur les 45 premiers jours de courses.

3. On note S_{45} la somme des 45 premiers termes de la suite (u_n) :
   $S_{45} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{44}$

   Parmi les quatre propositions ci-dessous, une seule est exacte.

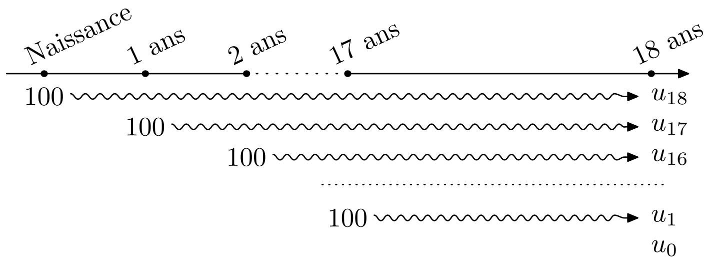
   a. $S_{45} = 50 \times 0{,}99^{45}$ b. $S_{45} = 50 \times \dfrac{1 - 0{,}99^{44}}{1 - 0{,}99}$

   c. $S_{45} = 50 \times \dfrac{1 - 0{,}99^{45}}{1 - 0{,}99}$ d. $S_{45} = 50 \times \dfrac{1 - 0{,}99^{46}}{1 - 0{,}99}$

   A l'aide de la valeur approchée obtenue à l'aide du logiciel, conjecturer l'expression correcte de S_{45}.

Exercice 2

Depuis le jour de la naissance de leur fille Aline, les parents ont déposé la somme de 100 € par an sur un livret A au nom de leur enfant.
On suppose que sur la période d'étude, le taux de rémunération du livret est resté constant à 1 %.



Comme indiqué ci-dessus ont construit les termes u_0, u_1, ..., u_{18} associé à la valeur, le jour des 18 ans d'Aline, de chaque somme déposée par les parents.

1. a. Donner les valeurs des termes u_0, u_1 et u_2.

   b. Donner la valeur de u_{18}, approchée au centième près, représentant la somme acquise par les 100 € déposés le jour de sa naissance.

2. Pour déterminer la somme disposant le livret A le jour de ses 18 ans, nous allons utiliser un logiciel de programmation.

   a. Dans le logiciel choisi, saisissez l'algorithme suivant :

```
S ← 0
Pour i allant de 0 à 5
    u ← 3+2×i
    S ← S+u
Fin Pour
```

   b. Justifier qu'à la fin de son exécution, la variable `S` contient la somme des 6 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 2.

   c. Modifier cet algorithme pour que la variable `S` contienne, en fin d'exécution de l'algorithme, la somme présente sur le livret A le jour des 18 ans d'Aline.

3. On note S_{18} la somme des 19 premiers termes de la suite (u_n) :
   $S_{18} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{18}$

   Parmi les quatre propositions ci-dessous, une seule est exacte.

   a. $S_{18} = 100 \times 1{,}01^{18}$ b. $S_{18} = 100 \times \dfrac{1 - 1{,}01^{17}}{1 - 1{,}01}$

   c. $S_{18} = 100 \times \dfrac{1 - 1{,}01^{18}}{1 - 1{,}01}$ d. $S_{18} = 100 \times \dfrac{1 - 1{,}01^{19}}{1 - 1{,}01}$

   A l'aide de la valeur approchée obtenue à l'aide du logiciel, conjecturer l'expression correcte de S_{18}.

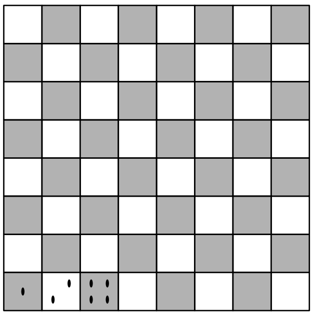
A la suite - Partie B

Exercice 3

Le problème de l'**échiquier de Sissa** *[...]* est un problème de mathématique pouvant s'exprimer ainsi :

> *"On place un grain de blé sur la première case d'un échiquier. Si on fait en sorte de doubler à chaque case le nombre de grains de la case précédente (un grain sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, etc...), combien de grains de riz obtient-on au total"*

Source : Wikipédia



Pour rappel, un échiquier est composé de 64 cases blanches ou noires.

Ainsi, ayant complété les trois premières cases, il y a 7 grains de blé sur l'échiquier.

Combien de grains de blé faut-il pour compléter l'échiquier ?

1. Combien de grain de blé sera mis dans la $10^{\text{ème}}$ case ?

On souhaite approcher la réponse à cet exercice à l'aide d'un langage de programmation.

2. a. Dans le langage choisi, saisissez l'algorithme suivant :

```
S ← 0
Pour i allant de 0 à 5
    u ← 3+2×i
    S ← S+u
Fin Pour
```

b. Justifier qu'à la fin de son exécution, la variable `S` contient la somme des 6 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 2.

3. Adapter cet algorithme afin que la variable `S` ait, en fin d'exécution, pour valeur le nombre de grains de blé présent sur l'échiquier à la fin du jeu.

   Donner la valeur approchée de la variable `S` en fin d'algorithme.

4. Parmi les quatre propositions ci-dessous, une seule :

   a. $S = 1\times 2^{63}$ b. $S = \dfrac{1-2^{63}}{1-2}$

   c. $S = \dfrac{1-2^{64}}{1-2}$ d. $S = \dfrac{1-2^{65}}{1-2}$

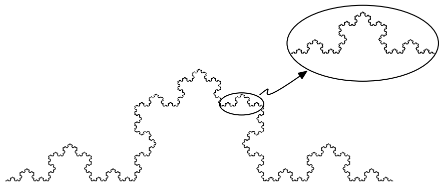
   A l'aide de la valeur approchée obtenue à l'aide du logiciel, conjecturer la réponse correcte.

Exercice 4

Une figure fractale est un objet mathématique, telle une courbe ou une surface, dont la structure est invariante par changement d'échelle.

Source : Wikipédia

Voici la courbe de Koch inventée en 1904 par le mathématicien suédois Helge Von Koch.



Le tapis de Sierpinski *(1916)* du nom de son créateur polonais, est construit par une succession d'étapes définies par :

A chaque carré blanc, on le subdivise en 9 carrés identiques en partageant ses côtés en trois segments de même longueur et on colorie en noir le carré central

Voici les six premières étapes de cette construction :

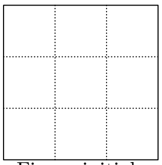
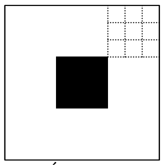
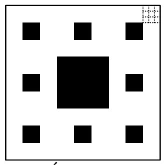


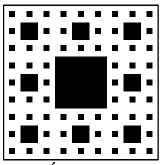
Figure initiale



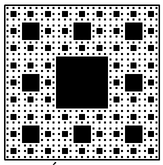
Étape 0



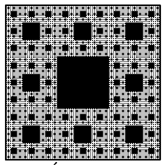
Étape 1



Étape 2



Étape 3



Étape 4

1. Pour les figures obtenues à l'étape 5 et suivant :
   - Combien de carrés noirs de côté $\frac{1}{3}$ contient la figure ?
   - Combien de carrés noirs de côté $\frac{1}{9}$ contient la figure ?
   - Combien de carrés noirs de côté $\frac{1}{27}$ contient la figure ?
2. A l'aide du logiciel de programmation, déterminer le nombre exact S de carré noirs présents à l'étape 4 ?
3. Déterminer les valeurs de q et n pour que l'égalité soit réalisée :
   $$S = \frac{1-q^k}{1-q}$$