Proposition :

Soit z et z' deux nombres complexes. On a les relations suivantes :

a. $z\cdot\overline{z} = |z|^2$

b. $|z\times z'| = |z|\times|z'|$

c. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |z^n| = |z|^n$

d. $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ où $z\neq 0$

e. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ où $z'\neq 0$

Preuve :

a. Notons $z=x+i\cdot y$ l'écriture algébrique du nombre complexe z. On a :

$$z\cdot\overline{z} = (x+i\cdot y)(x-i\cdot y) = x^2 - i\cdot x\cdot y + i\cdot y\cdot x - i^2\cdot y^2$$
$$= x^2 - (-1)\cdot y^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = |z|^2$$

b. Déterminons une expression simplifiée du carré de chacun des membres de l'égalité :

- $$|z\times z'|^2 = \left|(x+i\cdot y)\times(x'+i\cdot y')\right|^2$$
$$= \left|x\cdot x' + i\cdot x\cdot y' + i\cdot x'\cdot y + i^2\cdot y\cdot y'\right|^2$$
$$= \left|x\cdot x' + i\cdot(x\cdot y' + x'\cdot y) + (-1)\cdot y\cdot y'\right|^2$$
$$= \left|(x\cdot x' - y\cdot y') + i\cdot(x\cdot y' + x'\cdot y)\right|^2$$
$$= (x\cdot x' - y\cdot y')^2 + (x\cdot y' + x'\cdot y)^2$$
$$= x^2x'^2 - 2xx'yy' + y^2y'^2 + x^2y'^2 + 2xx'yy' + x'^2y^2$$
$$= x^2\cdot x'^2 + y^2\cdot y'^2 + x^2\cdot y'^2 + x'^2\cdot y^2$$
- $$\left(|z|\times|z'|\right)^2 = |z|^2\times|z'|^2 = (x^2+y^2)\cdot(x'^2+y'^2)$$
$$= x^2\cdot x'^2 + x^2\cdot y'^2 + y^2\cdot x'^2 + y^2\cdot y'^2$$

On obtient : $|z\times z'|^2 = \left(|z|\times|z'|\right)^2$

Ainsi, les deux nombres $|z\times z'|$ et $|z|\times|z'|$ sont positif et de carrés égaux : ces deux nombres sont égaux.

c. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n non-nul par la relation :$\mathcal{P}_n$: "$|z^n| = |z|^n$"

- **Initialisation :** $|z^1| = |z|$; $|z|^1 = |z|$

  On vient de montrer que $\mathcal{P}_1$.
- **Hérédité :**

  Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ réalisée pour un entier naturel n non-nul quelconque. C'est-à-dire qu'on a l'hypothèse de récurrence suivante : $|z^n| = |z|^n$

  Etudions l'expression suivante :

  $$|z^{n+1}| = |z^n\times z| \overset{\text{b.}}{=} |z^n|\times|z| = |z|^n\times|z| = |z|^{n+1}$$

  On vient de montrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :**

  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 1 et elle vérifie la propriété d'hérédité. Par un raisonnement par récurrence, on a établi que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non-nul.

d. Soit z un nombre complexe non-nul :

$$\left|\frac{1}{z}\right|^2 = \left(\frac{1}{z}\right)\cdot\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{z\cdot\overline{z}} = \frac{1}{|z|^2} = \frac{1^2}{|z|^2} = \left(\frac{1}{|z|}\right)^2$$

Les deux nombres $\left|\frac{1}{z}\right|$ et $\frac{1}{|z|}$ étant positif et leur carré étant égaux, on en déduit : $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

e. Etablit à l'aide des propriétés b. et d..

Proposition :

Soit z et z' deux nombres complexes. On a les relations suivantes :

a. $z\cdot\overline{z} = |z|^2$

b. $|z\times z'| = |z|\times|z'|$

c. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |z^n| = |z|^n$

d. $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ où $z\neq 0$

e. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ où $z'\neq 0$

Preuve :

a. Notons $z=x+i\cdot y$ l'écriture algébrique du nombre complexe z. On a :

$$z\cdot\overline{z} = (x+i\cdot y)(x-i\cdot y) = x^2 - i\cdot x\cdot y + i\cdot y\cdot x - i^2\cdot y^2$$
$$= x^2 - (-1)\cdot y^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = |z|^2$$

b. Déterminons une expression simplifiée du carré de chacun des membres de l'égalité :

- $$|z\times z'|^2 = \left|(x+i\cdot y)\times(x'+i\cdot y')\right|^2$$
$$= \left|x\cdot x' + i\cdot x\cdot y' + i\cdot x'\cdot y + i^2\cdot y\cdot y'\right|^2$$
$$= \left|x\cdot x' + i\cdot(x\cdot y' + x'\cdot y) + (-1)\cdot y\cdot y'\right|^2$$
$$= \left|(x\cdot x' - y\cdot y') + i\cdot(x\cdot y' + x'\cdot y)\right|^2$$
$$= (x\cdot x' - y\cdot y')^2 + (x\cdot y' + x'\cdot y)^2$$
$$= x^2x'^2 - 2xx'yy' + y^2y'^2 + x^2y'^2 + 2xx'yy' + x'^2y^2$$
$$= x^2\cdot x'^2 + y^2\cdot y'^2 + x^2\cdot y'^2 + x'^2\cdot y^2$$
- $$\left(|z|\times|z'|\right)^2 = |z|^2\times|z'|^2 = (x^2+y^2)\cdot(x'^2+y'^2)$$
$$= x^2\cdot x'^2 + x^2\cdot y'^2 + y^2\cdot x'^2 + y^2\cdot y'^2$$

On obtient : $|z\times z'|^2 = \left(|z|\times|z'|\right)^2$

Ainsi, les deux nombres $|z\times z'|$ et $|z|\times|z'|$ sont positif et de carrés égaux : ces deux nombres sont égaux.

c. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n non-nul par la relation :$\mathcal{P}_n$: "$|z^n| = |z|^n$"

- **Initialisation :** $|z^1| = |z|$; $|z|^1 = |z|$

  On vient de montrer que $\mathcal{P}_1$.
- **Hérédité :**

  Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ réalisée pour un entier naturel n non-nul quelconque. C'est-à-dire qu'on a l'hypothèse de récurrence suivante : $|z^n| = |z|^n$

  Etudions l'expression suivante :

  $$|z^{n+1}| = |z^n\times z| \overset{\text{b.}}{=} |z^n|\times|z| = |z|^n\times|z| = |z|^{n+1}$$

  On vient de montrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :**

  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 1 et elle vérifie la propriété d'hérédité. Par un raisonnement par récurrence, on a établi que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non-nul.

d. Soit z un nombre complexe non-nul :

$$\left|\frac{1}{z}\right|^2 = \left(\frac{1}{z}\right)\cdot\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{z\cdot\overline{z}} = \frac{1}{|z|^2} = \frac{1^2}{|z|^2} = \left(\frac{1}{|z|}\right)^2$$

Les deux nombres $\left|\frac{1}{z}\right|$ et $\frac{1}{|z|}$ étant positif et leur carré étant égaux, on en déduit : $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

e. Etablit à l'aide des propriétés b. et d..

