On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2 + 4x + 5$

Etudions les variations de la fonction f :

- Déterminons la forme canonique du polynôme du second degré :

  $$f(x) = x^2 + 4x + 5 = \left(x^2 + 4x\right) + 5$$
  $$= \left[(x+2)^2 - 4\right] + 5 = (x+2)^2 + 1$$

  On en déduit que la fonction f atteint son extrémum en -2.

- Déterminons le sens de variations de f sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-2\right]$:
  Prenons deux nombres a et b appartenant à l'intervalle $\left]-\infty\,;-2\right]$ et tels que $a<b$:

  $$a < b < -2$$
  $$a+2 < b+2 < 0$$

  Deux nombres négatifs et leurs carrés sont comparés dans le sens contraire :

  $$\left(a+2\right)^2 > \left(b+2\right)^2$$
  $$\left(a+2\right)^2 + 1 > \left(b+2\right)^2 + 1$$
  $$f(a) > f(b)$$

  Ainsi, deux nombres de l'intervalle $\left]-\infty\,;-2\right]$ et leurs images par la fonction f sont comparés dans le sens contraire.
  On en déduit que la fonction f est décroissante sur $\left]-\infty\,;-2\right]$.

- Déterminons le sens de variations de f sur l'intervalle $\left[-2\,;+\infty\right[$:
  Prenons deux nombres a et b appartenant à l'intervalle $\left[-2\,;+\infty\right[$ et tels que $a<b$:

  $$-2 < a < b$$
  $$0 < a+2 < b+2$$

  Deux nombres positifs et leurs carrés sont comparés dans le sens contraire :

  $$\left(a+2\right)^2 < \left(b+2\right)^2$$
  $$\left(a+2\right)^2 + 1 < \left(b+2\right)^2 + 1$$
  $$f(a) < f(b)$$

  Ainsi, deux nombres de l'intervalle $\left[-2\,;+\infty\right[$ et leurs images par la fonction f sont comparés dans le même sens.
  On en déduit que la fonction f est croissante sur $\left[-2\,;+\infty\right[$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = -x^2 + 8x + 1$

Etudions les variations de la fonction f :

- Déterminons la forme canonique du polynôme du second degré :

  $$f(x) = -x^2 + 8x + 1 = -\left(x^2 - 8x\right) + 1$$
  $$= -\left[(x-4)^2 - 16\right] + 1 = -(x-4)^2 + 16 + 1$$
  $$= -(x-4)^2 + 17$$

  On en déduit que la fonction f atteint son extrémum en 4.

- Déterminons le sens de variations de f sur l'intervalle $\left]-\infty\,;4\right]$:
  Prenons deux nombres a et b appartenant à l'intervalle $\left]-\infty\,;4\right]$ et tels que $a<b$:

  $$a < b < 4$$
  $$a-4 < b-4 < 0$$

  Deux nombres négatifs et leurs carrés sont comparés dans le sens contraire :

  $$\left(a-4\right)^2 > \left(b-4\right)^2$$
  $$-\left(a-4\right)^2 < -\left(b-4\right)^2$$
  $$-\left(a-4\right)^2 + 17 < -\left(b-4\right)^2 + 17$$
  $$f(a) < f(b)$$

  Ainsi, deux nombres de l'intervalle $\left]-\infty\,;4\right]$ et leurs images par la fonction f sont comparés dans le même sens.
  On en déduit que la fonction f est décroissante sur $\left]-\infty\,;4\right]$.

- Déterminons le sens de variations de f sur l'intervalle $\left[4\,;+\infty\right[$:
  Prenons deux nombres a et b appartenant à l'intervalle $\left[4\,;+\infty\right[$ et tels que $a<b$:

  $$4 < a < b$$
  $$0 < a-4 < b-4$$

  Deux nombres positifs et leurs carrés sont comparés dans le sens contraire :

  $$\left(a-4\right)^2 < \left(b-4\right)^2$$
  $$-\left(a-4\right)^2 > -\left(b-4\right)^2$$
  $$-\left(a-4\right)^2 + 17 > -\left(b-4\right)^2 + 17$$
  $$f(a) > f(b)$$

  Ainsi, deux nombres de l'intervalle $\left[4\,;+\infty\right[$ et leurs images par la fonction f sont comparés dans le sens contraire.
  On en déduit que la fonction f est décroissante sur $\left[4\,;+\infty\right[$.