Proposition :

Considérons la fonction f du second degré admettant la forme canonique :

$$f(x) = a\cdot(x-\beta)^2+\gamma$$

- Si $a>0$ alors la fonction f admet un minimum atteint pour $x=\beta$ dont la valeur est γ
- Si $a<0$ alors la fonction f admet un maximum atteint pour $x=\beta$ dont la valeur est γ.

Preuve :

Le carré d'un nombre est toujours positif ou nul. Ainsi, pour tout nombre x réel ($x\in\mathbb{R}$), on a l'inégalité :

$$(x-\beta)^2 \geqslant 0$$

Effectuons une disjonction de cas sur le signe de a, coefficient du terme du second degré du polynôme définissant la fonction f :

- Si $a>0$, on a les comparaisons suivantes :
$$\begin{aligned} (x-\beta)^2 &\geqslant 0 \\ a\times(x-\beta)^2 &\geqslant a\times 0 \\ a\times(x-\beta)^2 &\geqslant 0 \\ a\times(x-\beta)^2+\gamma &\geqslant \gamma \\ f(x) &\geqslant \gamma \end{aligned}$$
On vient de prouver que les images $f(x)$ sont supérieure à γ. Ainsi, γ est la valeur minimale prise par la fonction f et est atteinte pour $x=\beta$.
- Si $a<0$, on a les comparaisons suivantes :
$$\begin{aligned} (x-\beta)^2 &\geqslant 0 \\ a\times(x-\beta)^2 &\leqslant a\times 0 \\ a\times(x-\beta)^2 &\leqslant 0 \\ a\times(x-\beta)^2+\gamma &\leqslant \gamma \\ f(x) &\leqslant \beta \end{aligned}$$
On vient de prouver que les images $f(x)$ sont inférieure à γ. Ainsi, γ est la valeur maxmimale prise par la fonction f et est atteinte pour $x=\beta$.

Proposition :

Soit f une fonction du second degré définie par :

$$f(x) = ax^2+bx+c \quad b,c\in\mathbb{R} \text{ et } a\in\mathbb{R}^*$$

La fonction d admet un extrémum global en $-\dfrac{b}{2a}$.

Plus précisément :

- Si $a<0$, la fonction f admet un maximum pour $x=-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $a>0$, la fonction f admet un minimum pour $x=-\dfrac{b}{2a}$.

Preuve :

- Exprimons l'image de $-\dfrac{b}{2a}$ par la fonction f :
$$f\Big(-\frac{b}{2a}\Big) = a\Big(-\frac{b}{2a}\Big)^2+b\Big(-\frac{b}{2a}\Big)+c$$
$$= a\times\frac{b^2}{(2a)^2}-\frac{b^2}{2a}+c = a\times\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c$$
$$= \frac{b^2}{4a^2}-\frac{2b^2}{4a}+c = \frac{b^2-2b^2}{4a}+c = -\frac{b^2}{4a}+c$$
- Etudions la différence :
$$f(x)-f\Big(-\frac{b}{2a}\Big) = \big(ax^2+bx+c\big)-\Big(-\frac{b^2}{4a}+c\Big)$$
$$= ax^2+bx+c+\frac{b^2}{4a}-c = ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}$$
$$= \frac{4a^2x^2+4abx+b^2}{4a} = \frac{(2ax)^2+2\times 2ax\times b+b^2}{4a}$$

Par reconnaissance, au numérateur, de la première identité remarquable :

$$= \frac{(2ax+b)^2}{4a}$$

On en déduit les deux ci-dessous :

- Si $a>0$, on a la comparaison pour tout x, où $x\in\mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} \frac{(2ax+b)^2}{4a} &> 0 \\ f(x)-f\Big(-\frac{b}{2a}\Big) &> 0 \\ f(x) &> f\Big(-\frac{b}{2a}\Big) \end{aligned}$$
On en déduit que la fonction f admet un minimum globale en $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $a<0$, on a la comparaison pour tout x, où $x\in\mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} \frac{(2ax+b)^2}{4a} &< 0 \\ f(x)-f\Big(-\frac{b}{2a}\Big) &< 0 \\ f(x) &< f\Big(-\frac{b}{2a}\Big) \end{aligned}$$
On en déduit que la fonction f admet un maximum global en $-\dfrac{b}{2a}$.

