Proposition :est de primalité

Soit n un entier naturel *($n \in \mathbb{N}$)*. Si n n'est pas un entier premier alors il existe au moins un entier premier p diviseur de n tel que $2 \leqslant p < \sqrt{n}$.

Preuve :

Cette démonstration s'effectue par un raisonnement par l'absurde : supposons que l'entier naturel n soit non-premier et qu'aucun entier p premier tel que $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$ ne le divise.

Ces deux hypothèses vont à l'encontre de notre proposition à établir! Montrons que cela n'est pas possible.

Puisque l'entier n n'est pas premier, il existe un entier q différent de 1 et de lui-même qui le divise. Comme n est un multiple de q, il existe un entier naturel k tels que :
$$n = q \times k$$

Supposons que q est le plus petit des entiers q et k *(si ce n'est pas le cas, on recommence le raisonnement avec k pour diviseur de n)*.
Nous devons faire deux disjonctions de cas :

- l'entier q est premier : alors il n'est pas égal à 1 et il ne vérifie pas la relation $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$.
  On en déduit la comparaison : $q > \sqrt{n}$.
  L'entier k étant plus grand que q, on a : $k > \sqrt{n}$

  En multipliant, membre à membre, ces deux inégalités de nombres positifs, on obtient :
  $$q \times k > \sqrt{n} \times \sqrt{n}$$
  $$n > \left(\sqrt{n}\right)^2$$
  $$n > n$$
  Ce qui est absurde : on en déduit l'existence d'un diviseur p premier de n vérifiant $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$
- l'entier q n'est pas premier, il suffit d'utiliser la décomposition de l'entier q en produit de facteurs premiers afin d'en extraire un diviseur premier de l'entier n.
  On reprend alors la démonstration au point précédent.

Proposition :est de primalité

Soit n un entier naturel *($n \in \mathbb{N}$)*. Si n n'est pas un entier premier alors il existe au moins un entier premier p diviseur de n tel que $2 \leqslant p < \sqrt{n}$.

Preuve :

Cette démonstration s'effectue par un raisonnement par l'absurde : supposons que l'entier naturel n soit non-premier et qu'aucun entier p premier tel que $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$ ne le divise.

Ces deux hypothèses vont à l'encontre de notre proposition à établir! Montrons que cela n'est pas possible.

Puisque l'entier n n'est pas premier, il existe un entier q différent de 1 et de lui-même qui le divise. Comme n est un multiple de q, il existe un entier naturel k tels que :
$$n = q \times k$$

Supposons que q est le plus petit des entiers q et k *(si ce n'est pas le cas, on recommence le raisonnement avec k pour diviseur de n)*.
Nous devons faire deux disjonctions de cas :

- l'entier q est premier : alors il n'est pas égal à 1 et il ne vérifie pas la relation $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$.
  On en déduit la comparaison : $q > \sqrt{n}$.
  L'entier k étant plus grand que q, on a : $k > \sqrt{n}$

  En multipliant, membre à membre, ces deux inégalités de nombres positifs, on obtient :
  $$q \times k > \sqrt{n} \times \sqrt{n}$$
  $$n > \left(\sqrt{n}\right)^2$$
  $$n > n$$
  Ce qui est absurde : on en déduit l'existence d'un diviseur p premier de n vérifiant $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$
- l'entier q n'est pas premier, il suffit d'utiliser la décomposition de l'entier q en produit de facteurs premiers afin d'en extraire un diviseur premier de l'entier n.
  On reprend alors la démonstration au point précédent.