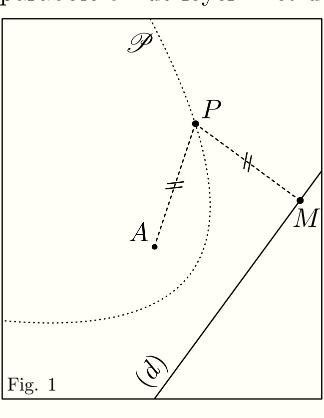
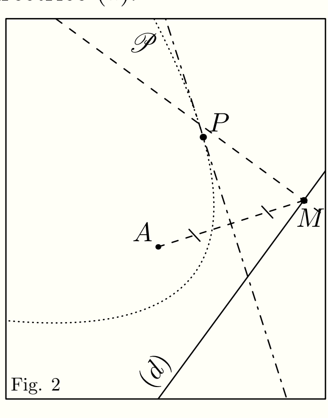
**Définition :**

Dans le plan, on considère une droite $(d)$ et un point $A$ n'appartenant pas à $(d)$.
On appelle **parabole de foyer $A$ et de directrice $(d)$** l'ensemble des points $M$ du plan tel que le point $M$ est équidistant du point $A$ et de la droite $(d)$.

**Remarque :**

Considérons ci-dessous, une droite $(d)$, un point $(A)$ et la parabole $\mathscr{P}$ de foyer $A$ et de directrice $(d)$.




- **Fig. 1** : on observe que le point $P$ appartient à la parabole $\mathscr{P}$ et qu'il est équidistant des points $A$ et $M$.
- **Fig. 2** : pour construire les points de la parabole $\mathscr{P}$, à tout point $M$ de la droite $(d)$, on associe le point $P$ appartenant à $\mathscr{P}$ 'intersection de la médiatrice du segment $[AM]$ avec la droite passant par le point $M$ perpendiculaire à la droite $(d)$.

**Proposition :**

Dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé, on considère une droite $(d)$ parallèle à l'axe des abscisses et un point $A$ n'appartenant pas à $(d)$. La parabole admet une équation cartésienne de la forme :

$$y = a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c \quad \text{où } a\in\mathbb{R}^* \text{ et } b{,}c\in\mathbb{R}$$

**Preuve :**

On utilisera les notations utilisées à la figure 2 et notons $A(a\,;b)$ et l'équation cartésienne de la droite $(d)$ :
$y=c$.
Puisque le point $A$ n'appartient pas à la droite $(d)$, son ordonnée est différent de $c$ : $c-b\neq 0$

Soit $e$ un nombre réel quelconque. On note $M$ le point de $(d)$ d'abscisse $x$. Le point $M$ a pour coordonnées : $M(e\,;c)$

Le point $I$ milieu du segment $[AM]$ a pour coordonnées :

$$I\Big(\frac{x_A+x_M}{2}\,;\frac{y_A+y_M}{2}\Big) = \Big(\frac{a+e}{2}\,;\frac{b+c}{2}\Big)$$

Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AM} = (x_M-x_A\,;y_M-y_A) = (e-a\,;c-b)$$

La droite $(IP)$ étant la médiatrice du segment $[AM]$, on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur normal à la droite $(IP)$. La droite $(IP)$ admet une équation cartésienne de la forme :

$$(e-a){\cdot}x + (c-b){\cdot}y + f = 0 \quad \text{où } f\in\mathbb{R}$$

Les coordonnées du point $I$ vérifient cette équation :

$$(e-a){\cdot}\frac{a+e}{2} + (c-b){\cdot}\frac{b+c}{2} + f = 0$$

$$\frac{e^2-a^2}{2} + \frac{c^2-b^2}{2} + f = 0$$

$$f = -\frac{e^2-a^2}{2} - \frac{c^2-b^2}{2}$$

L'équation cartésienne de la droite $(IP)$ est :

$$(e-a){\cdot}x + (c-b){\cdot}y - \frac{e^2-a^2}{2} - \frac{c^2-b^2}{2} = 0$$

Le point $P$ appartenant à la droite $(PM)$, sont abscisse vaut $e$. On en déduit l'ordonnée du point $P$ :

$$(e-a){\cdot}e + (c-b){\cdot}y_P - \frac{e^2-a^2}{2} - \frac{c^2-b^2}{2} = 0$$

$$(c-b){\cdot}y_P = \frac{e^2-a^2}{2} + \frac{c^2-b^2}{2} - (e-a){\cdot}e$$

$$y_P = \frac{e^2-a^2}{2{\cdot}(c-b)} + \frac{c^2-b^2}{2{\cdot}(c-b)} - \frac{e-a}{c-b}{\cdot}e$$

$$y_P = \frac{e^2}{2{\cdot}(c-b)} - \frac{a^2}{2{\cdot}(c-b)} + \frac{c+b}{2} - \frac{e^2}{c-b} - \frac{a}{c-b}{\cdot}e$$

$$y_P = -\frac{1}{2{\cdot}(c-b)}{\cdot}e^2 + \frac{a}{c-b}{\cdot}e - \frac{a^2}{2{\cdot}(c-b)} + \frac{c+b}{2}$$

En notant $x$ l'abscisse du point $M$, le point $P$ a pour coordonnées :

$$P\Big(x\,;-\frac{1}{2{\cdot}(c-b)}{\cdot}x^2 + \frac{a}{c-b}{\cdot}x - \frac{a^2}{2{\cdot}(c-b)} + \frac{c+b}{2}\Big)$$

On en déduit que l'ensemble des points de la parabole $\mathscr{P}$ vérifie l'équation cartésienne :

$$y = -\frac{1}{2{\cdot}(c-b)}{\cdot}x^2 + \frac{a}{c-b}{\cdot}x - \frac{a^2}{2{\cdot}(c-b)} + \frac{c+b}{2}$$