Proposition :

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ orthonormé, on considère une parabole $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne :

$$y = a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c$$

La parabole $\mathcal{P}$ admet pour axe de symétrie la droite d'équation cartésienne $x = -\dfrac{b}{2{\cdot}a}$

Preuve :

Soit M un point quelconque de la parabole $\mathscr{P}$. Son abscisse peut s'exprimer sous la forme : $x_M = -\dfrac{b}{2{\cdot}a} + h$ où $h \in \mathbb{R}$

L'ordonnée du point M a pour expression :

$$\begin{aligned} y_M &= a{\cdot}{x_M}^2 + b{\cdot}x_M + c \\ &= a{\cdot}\Big(-\frac{b}{2{\cdot}a} + h\Big)^2 + b{\cdot}\Big(-\frac{b}{2{\cdot}a} + h\Big) + c \\ &= a{\cdot}\Big[\Big(-\frac{b}{2{\cdot}a}\Big)^2 + 2{\cdot}\Big(-\frac{b}{2{\cdot}a}\Big){\cdot}h + h^2\Big] - \frac{b^2}{2{\cdot}a} + b{\cdot}h + c \\ &= a{\cdot}h^2 - b{\cdot}h + \frac{b^2}{4{\cdot}a} - \frac{b^2}{2{\cdot}a} + b{\cdot}h + c \\ &= a{\cdot}h^2 + \frac{b^2}{4{\cdot}a} - \frac{2{\cdot}b^2}{4{\cdot}a} + \frac{4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a} \\ &= a{\cdot}h^2 + \frac{-b^2 + 4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a} \end{aligned}$$

Le point M a pour coordonnées :

$$M\left(-\frac{b}{2{\cdot}a} + h\,;\, a{\cdot}h^2 + \frac{-b^2+4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}\right)$$

Par la symétrie d'axe $x = -\dfrac{b}{2{\cdot}a}$, le symétrique M' du point M a pour coordonnées : $M'\left(-\dfrac{b}{2{\cdot}a} - h\,;\, a{\cdot}h^2 + \dfrac{-b^2+4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}\right)$

- Le milieu I a pour coordonnées du segment $[MM']$:
  $$I\left(-\frac{b}{2{\cdot}a}\,;\, a{\cdot}h^2 + \frac{-b^2+4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}\right)$$
  Le point I appartient à l'axe de la symétrie.
- Le vecteur $\overrightarrow{MM'}\Big(-\dfrac{b}{a}\,;0\Big)$ est normal à l'axe de symétrie de la symétrie.

Vérifions que le point M' appartient à la parabole. Le point d'abscisse $-\dfrac{b}{2{\cdot}a} - h$ de la parabole $\mathscr{P}$ a pour ordonnée :

$$\begin{aligned} y &= a{\cdot}\Big(-\frac{b}{2{\cdot}a} - h\Big)^2 + b{\cdot}\Big(-\frac{b}{2{\cdot}a} - h\Big) + c \\ &= a{\cdot}\Big(\frac{b^2}{4{\cdot}a^2} + \frac{b}{a}{\cdot}h + h^2\Big) - \frac{b^2}{2{\cdot}a} - b{\cdot}h + c \\ &= \frac{b^2}{4{\cdot}a} + b{\cdot}h + a{\cdot}h^2 - \frac{b^2}{2{\cdot}a} - b{\cdot}h + c \\ &= -\frac{b^2}{4{\cdot}a} + a{\cdot}h^2 + c = a{\cdot}h^2 + \frac{-b^2 + 4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a} \end{aligned}$$

On vient de montrer que tout point de la parabole $\mathscr{P}$ admet un symétrique par la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2{\cdot}a}$.