Compilation d'annales - Ts - 2014

Exercice 1 *(Polynésie - Juin 2014 - 6257)*

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = e^x \quad ; \quad g(x) = 2\cdot e^{\frac{x}{2}} - 1$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.

2. Etude de la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ.
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2\cdot e^{\frac{x}{2}} - x - 2$

   a. Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

   b. Justifier que, pour tout réel x :
   $$h(x) = x\cdot\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x}\right).$$
   En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

   c. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

   d. Dresser le tableau de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

   e. En déduire que, pour tout réel x : $2\cdot e^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x - 1$

   f. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ ?

3. Etude de la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

   a. Pour tout réel x, développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.

   b. Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

4. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 2 *(Métropole - Juin 2014 - 6259)*

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f_1(x) = x + e^{-x}$

1. Justifier que $\mathscr{C}_1$ passe par le point A de coordonnées $(0\,;1)$.

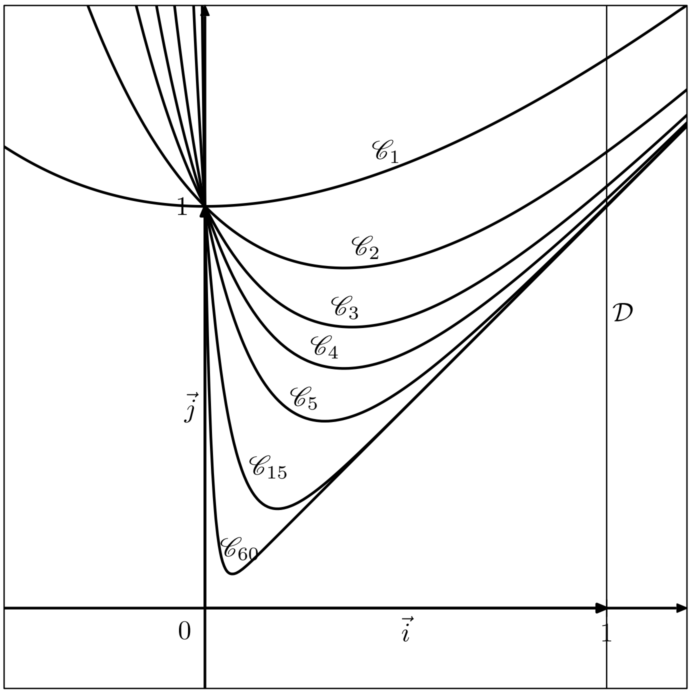
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1. On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 \left(x + e^{-n\cdot x}\right) \mathrm{d}x$$

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f_n(x) = x + e^{-n\cdot x}$
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 1$.



   a. Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.

   b. En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.
$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)\cdot x}\cdot\left(1 - e^x\right) \mathrm{d}x$$
En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

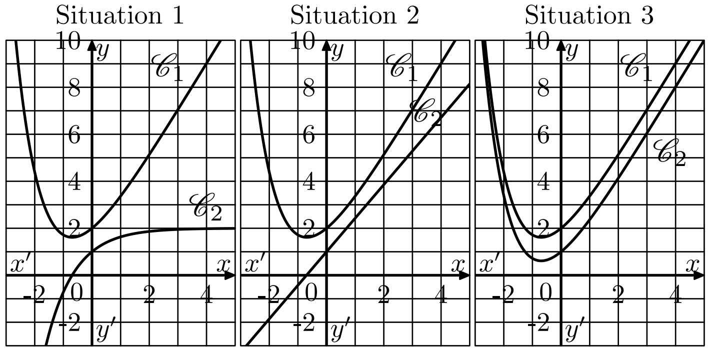
3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n).

Exercice 3 *(Pondichéry- Avril 2014 - 6046)*

Partie A

f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f.
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f'.
Le point A de coordonnées $(0\,;2)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_1$.
Le point B de coordonnées $(0\,;1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_2$.

1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de la fonction f. Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathscr{C}_2$ de la fonction dérivée f' est tracé convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.



2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ en A.

3. On sait que pour tout réel x, $f(x)=e^{-x}+ax+b$ où a et b sont deux nombres réels.

   a. Déterminer la valeur de b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.

   b. Prouver que $a=2$.

4. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

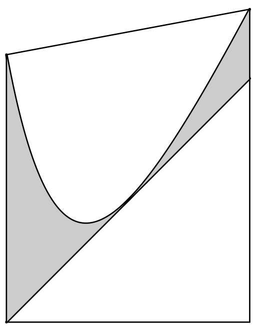
Partie B

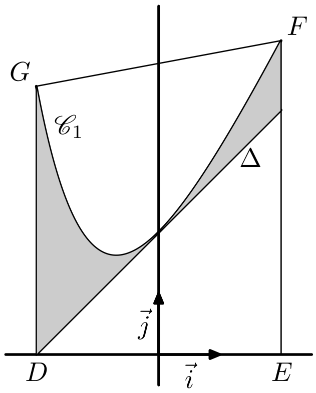
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=f(x)-(x+2)$.

1. a. Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.

   b. En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_1$ par rapport à la droite Δ

La figure 2 ci-dessous représente le logo d'un entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe $\mathscr{C}_1$ et de la droite Δ, comme l'indique la figure 3 ci-dessous. Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.





Le contour du logo est représenté par le trapèze $DEFG$ où :

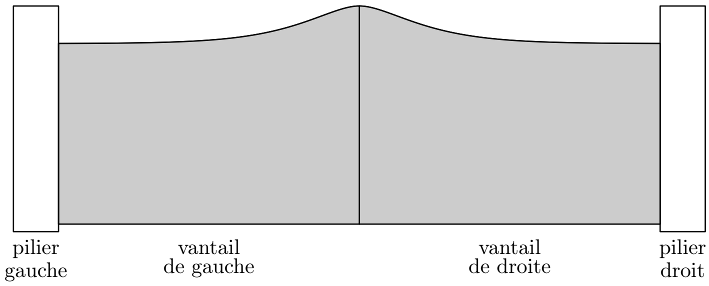
- D est le point de coordonnées $(-2\,;0)$,
- E est le point de coordonnées $(2\,;0)$,
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe $\mathscr{C}_1$,
- G est le point d'abscisse -2 de la courbe $\mathscr{C}_2$.

La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}_1$, la droite d'équation $x=-2$ et la droite d'équation $x=2$.

2. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo colorée en gris *(on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} du résultat)*.

Exercice 4 *(Amérique du Sud - Novembre 2014 - 6266)*

On désire réaliser un portail comme indiqué ci-dessous. Chaque vantail mesure 2 mètres de large.



Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail

On modélise le bord supérieur du vantail de droite du portail avec une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{4}\right)\cdot e^{-4x}+b$$

où b est un nombre réel. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$.

1. a. Calculer $f'(x)$, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;2]$.

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$.

2. Déterminer le nombre b pour que la hauteur maximale du portail soit égale à $1{,}5\,m$.

Dans la suite la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{4}\right)\cdot e^{-4x}+\frac{5}{4}$$

Partie B : détermination d'une aire

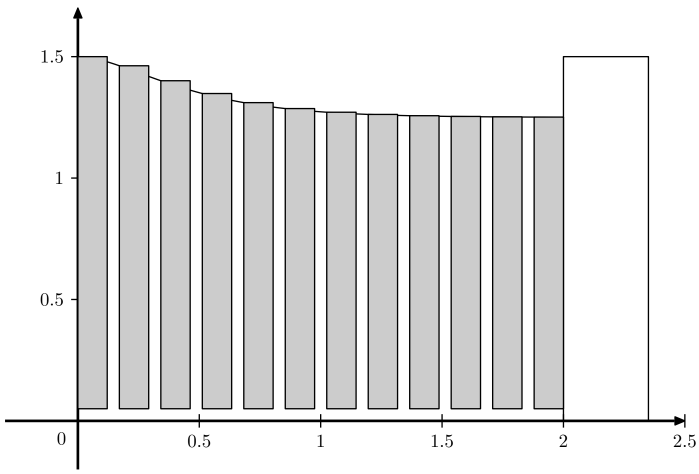
Chaque vantail est réalisé à l'aide d'une plaque métallique. On veut calculer l'aire de chacune des plaques, sachant que le bord inférieur du vantail est à $0{,}05\,m$ de hauteur du sol.

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :
$$F(x)=\left(-\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\right)\cdot e^{-4x}+\frac{5}{4}\cdot x$$
est une primitive de la fonction f.

2. En déduire l'aire en m^2 de chaque vantail. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de cette aire. *(On s'intéresse ici à l'objet "vantail" sans faire référence à son environnement).*

Partie C : utilisation d'un algorithme

On désire réaliser un portail de même forme mais à partir de planches rectangulaires disjointes de largeur $0{,}12\,m$, espacées de $0{,}05\,m$. Pour le vantail de droite, le coin supérieur gauche de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail et le bas de chaque planche à $0{,}05\,m$ de hauteur. Les planches sont numérotées à partir de 0 : ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0.



La distance entre le bas du portail et le sol est de 0,05 m

1. Donner l'aire de la planche de numéro k.

2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la somme des aires des planches du vantail de droite.

Variables :	Les nombres X et S sont des nombres réels
Initialisation :	On affecte à S la valeur 0
	On affecte à X la valeur 0
Traitement :	**Tant que** $X+0{,}17<\ldots$
	S prend la valeur $S+\ldots$
	X prend la valeur $X+0{,}17$
	Fin de Tant Que
Affichage	On affiche S.

Exercice 5 *(Centres étrangers - Juin 2014 - 6267)*

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés *(pixels)* dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de façon suivante :

- $x=0$ pour le blanc ;
- $x=1$ pour le noir ;
- $x=0{,}01$; $x=0{,}02$ et ainsi de suite jusqu'à $x=0{,}99$ par pas de 0,01 pour toutes les nuances intermédiaires *(du clair au foncé)*.

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.
Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites "*fonctions de retouche*".
Une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ est dite "*fonction de retouche*" si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0)=0$;
- $f(1)=1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0\,;1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x)>x$, et éclaircie, si $f(x)<x$.

- si $f(x)=x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $0{,}2^2=0{,}04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
- Si $f(x)=\sqrt{x}$, la nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0{,}2}\simeq 0{,}45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

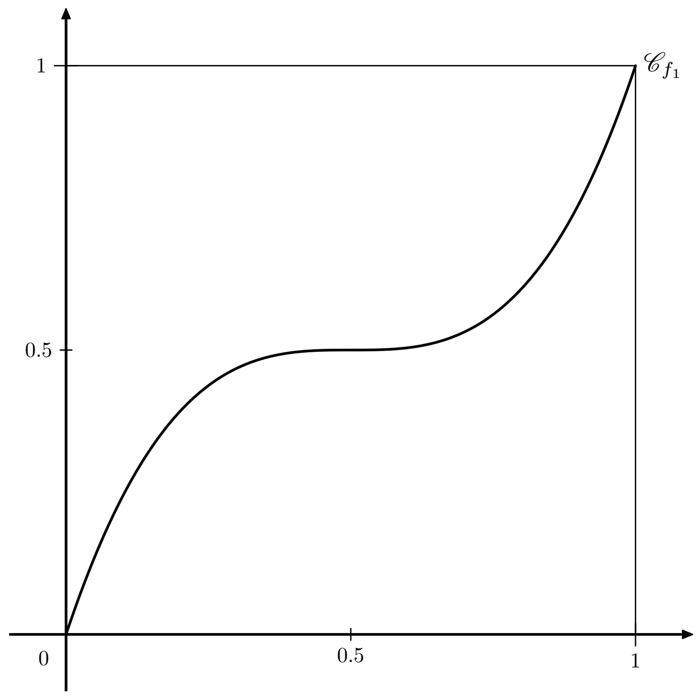
Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par : $\quad f_1(x)=4x^3-6x^2+3x$

   a. Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

   b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x)\leqslant x$, à l'aide du graphique donné ci-dessous, en faisant apparaître les pointillés utiles.



   Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par : $\quad f_2(x)=\ln\left[1+(e-1)\cdot x\right]$

   On admet que f_2 est une fonction de retouche.
   On définit sur l'intervalle $[0\,;1]$ la fonction g par :
   $g(x)=f_2(x)-x$.

   a. Etablir que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;1]$:
   $$g'(x)=\frac{(e-2)-(e-1)\cdot x}{1+(e-1)\cdot x}$$

   b. Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;1]$. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\dfrac{e-2}{e-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est 0,12.

   c. Etablir que l'équation $g(x)=0{,}05$ admet sur l'intervalle $[0\,;1]$ deux solutions α et β, avec $\alpha<\beta$.

On admettra que : $\quad 0{,}08<\alpha<0{,}09 \quad ; \quad 0{,}85<\beta<0{,}86$

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à 0,05.

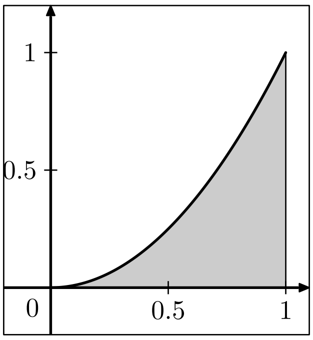
1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche.
Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables :	x *(nuance initiale)*
	y *(nuance retouchée)*
	E *(écart)*
	c *(compteur)*
	k
Initialisation :	c prend la valeur 0
Traitement :	Pour k allant de 0 à 100, faire
	x prend la valeur $\dfrac{k}{100}$
	y prend la valeur $f(x)$
	E prend la valeur $\lvert y-x \rvert$
	Si $E \geqslant 0{,}05$, faire
	c prend la valeur $c+1$
	Fin si
	Fin pour
Sortie :	Afficher c

2. Quelle valeur arrichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la partie **A** ?

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, $f(x) \leqslant x$.
On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire $\mathcal{A}_f$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.



Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image celle correspond à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouches :

$$f_3(x) = x\cdot e^{(x^2-1)} \quad ; \quad f_4(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}$$

1. a. Calculer $\mathcal{A}_{f_3}$.

b. Calculer $\mathcal{A}_{f_4}$.

2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?

Exercice 6 *(Asie - Juin 2014 - 6258)*

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$ par :

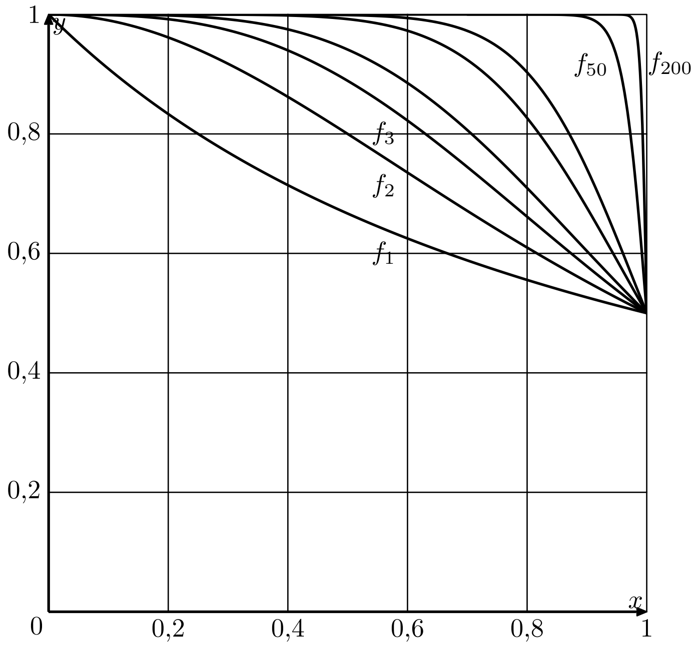
$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre I_n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracés ci-après.

En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.



2. Calculer la valeur exacte de I_1.

3. a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $I_n \leqslant 1$.

4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}$$

5. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 (1-x^n)\,\mathrm{d}x$.

6. A l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

7. On considère l'algorithme suivant :

Variables	: n, p et k sont des entiers naturels.
	x et I sont des réels.
Initialisation	: I prend la valeur 0.
Traitement	: Demander un entier $n \geqslant 1$.
	Demander un entier $p \geqslant 1$.
	Pour k allant de 0 à $p-1$ faire :
	x prend la valeur $\dfrac{k}{p}$
	I prend la valeur $I + \dfrac{1}{1+x^n} \times \dfrac{1}{p}$
	Fin Pour
	Afficher I

a. Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n=2$ et $p=5$?
On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

b. Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n.

Exercice 7 *(Pondichéry - Avril 2014 - 6045)*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad ; \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\right)\cdot z_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On définit la suite (r_n) par :

$r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe : $\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot i$.

2. a. Montrer que (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   b. En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

   c. Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée :	Demander la valeur de P

Traitement :	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $R>P$
	    n prend la valeur $n+1$
	    R prend la valeur $\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$
	Fin tant que

Sortie :	Afficher n

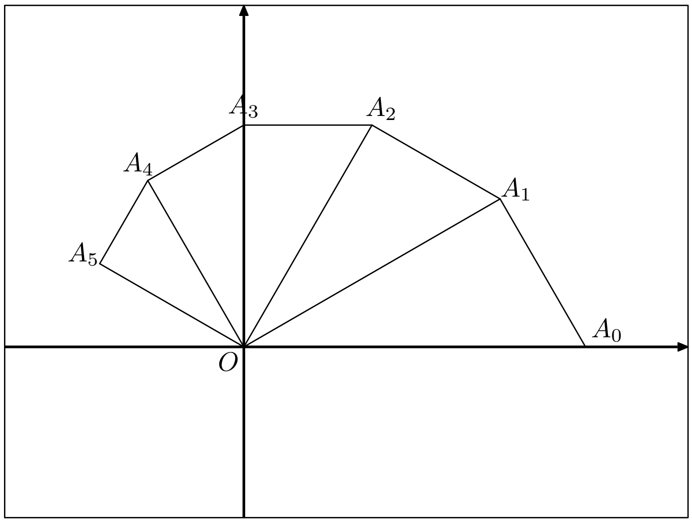
   a. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P=0{,}5$?

   b. Pour $P=0{,}01$, on obtient $n=33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

4. a. Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

   b. On admet que : $z_n = r_n\cdot e^{i\cdot\frac{n\pi}{6}}$
   Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

   c. Compléter la figure donnée ci-dessous en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.
   Les traits de construction seront apparents.



Exercice 8 *(Antilles-Guyanne - Septembre 2014 - 6262)*

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$. On prendra comme unité $2\,cm$ sur chaque axe.
Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe :

$f(z) = z^2+2\cdot z+9$

1. Calculer l'image de $-1+i\cdot\sqrt{3}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z)=5$.
   Ecrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation

   Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation *(A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).*
   On laissera les traits de construction apparents.

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z)=\lambda$ d'inconnue z.
   Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z)=\lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $|f(z)-8|=3$

   Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\,;0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
   Tracer (F) sur le graphique.

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z=x+i\cdot y$ où x et y sont des nombres réels.

   a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est :
   $\left(x^2-y^2+2\cdot x+9\right)+i\cdot\left(2\cdot x\cdot y+2\cdot y\right)$.

   b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
   Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

Exercice 9 *(Métropole - Juin 2014 - 6260)*

On désigne par (E) l'équation $z^4+4z^2+16=0$ d'inconnue complexe z.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2+4\cdot Z+16=0$.
Ecrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.

2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\dfrac{\pi}{3}$.
Calculer a^2 sous forme algébrique.
En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :
$z^2=-2+2\cdot i\cdot\sqrt{3}$.
On écrira les solutions sous forme algébrique.

3. **Restitution organisée de connaissances**
On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z=x+i\cdot y$ où $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z}$ définie par $\overline{z}=x-i\cdot y$.
Démontrer que :
   - Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.
   - Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n : $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$.

4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugé $\overline{z}$ est également une solution de (E).
En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

Exercice 10 *(Polynésie - Juin 2014 - 6256)*

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par :
$u_0=0$; $u_{n+1}=u_n+2\cdot n+2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Calculer u_1 et u_2.

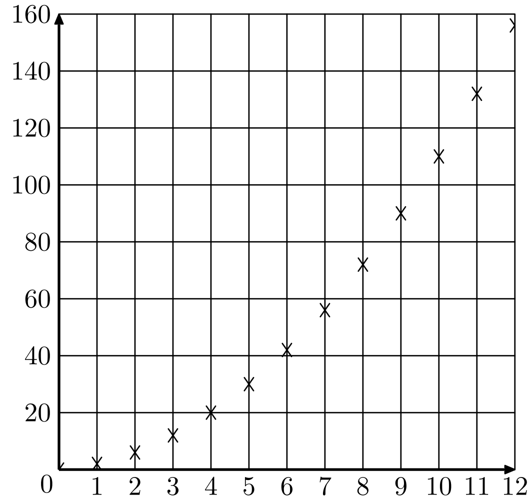
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1	Algorithme2
Variables :	**Variables**
n est un entier naturel	n est un entier naturel.
u est un réel	u est un réel.
Entrée :	**Entrée :**
Saisir la valeur de n	Saisir la valeur de n
Traitement :	**Traitement :**
u prend la valeur 0	u prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à n :	Pour i allant de 0 à $n-1$:
u prend la valeur $u+2\cdot i+2$	u prend la valeur $u+2i+2$
Fin pour	Fin pour
Sortie :	**Sortie :**
Afficher u	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. A l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



   a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$?
   Démontrer cette conjecture.

   b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n : $u_n=a\cdot n^2+b\cdot n+c$.
   Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite $\left(v_n\right)$ par :
$v_n=u_{n+1}-u_n$

   a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite $\left(v_n\right)$?

   b. On définit, pour tout entier naturel n :
   $$S_n=\sum_{k=0}^{n}v_k=v_0+v_1+\cdots+v_n$$
   Démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $S_n=(n+1)(n+2)$

   c. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $S_n=u_{n+1}-u_0$,
   puis exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 11 *(Métropole - Septembre 2014 - 6264)*

On administre à un patient un médicatment par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.
Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de $10\,m\ell$ de médicament. On estime que $20\,\%$ du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en $m\ell$, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi, $u_0=10$.

   a. Quelle est la nature de la suite $\left(u_n\right)$?

   b. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.

   c. Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à $1\,\%$ de la quantité initiale ? Justifier la réponse.

2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de $10\,m\ell$ de médicament. On estime que $20\,\%$ du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en dessous de $5\,m\ell$, la machine réinjecte $4\,m\ell$ de

produit.

Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.

Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en $m\ell$, restant dans le sang à la minute n.

L'algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute.

```
     Variables : n est un entier naturel
                 v est un nombre réel.
Initialisation : Affecter à v la valeur 10.
    Traitement : Pour n allant de 1 à 15
                    Affecter à v la valeur 0,8×v.
                    Si v<5 alors affecter à v la valeur v+4
                    Afficher v
                 Fin de boucle
```

a. Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
v_n	10	8	6,4					8,15

n	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

b. Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?

c. On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte $2\,m\ell$ de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à $6\,m\ell$ et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.

Recopier l'algorithme précédente en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en $m\ell$, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.

3. On programme la machine de façon que :

- à l'instant 0, elle injecte $10\,m\ell$ de médicament,
- toutes les minutes, elle injecte $1\,m\ell$ de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.

Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en $m\ell$, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

a. Justifier que pour tout entier naturel n :
$w_{n+1} = 0{,}8\cdot w_n + 1$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = w_n - 5$.
Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

d. Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?

Exercice 12 *(Métropole - Juin 2014 - 6261)*

Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AD}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (DF).

a. Donner les coordonnées des points D et F.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

d. Calculer les coordonnées du point H.

e. Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.

2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\cdot\overrightarrow{DF}$.
On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.
Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.

a. Démontrer que : $ME^2 = \dfrac{3}{2}\cdot t^2 - \dfrac{5}{2}\cdot t + \dfrac{5}{4}$

b. Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
En déduire que : $ME\cdot\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{2}}$.

c. Justifier que α est maximale si, et seulement si, $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
En déduire que α est maximale si, et seulement si, ME^2 est minimal.

d. Conclure.

Exercice 13 *(Métropole - Septembre 2014 - 6265)*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$, on considère le tétraèdre $ABCD$ dont les sommets ont pour coordonnées :

$A\left(1\,;-\sqrt{3}\,;0\right)$; $B\left(1\,;\sqrt{3}\,;0\right)$; $C\left(-2\,;0\,;0\right)$; $D\left(0\,;0\,;2\sqrt{2}\right)$

1. Démontrer que le plan (ABD) a pour équation cartésienne $4x + z\sqrt{2} = 4$

2. On note $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

a. Démontrer que $\mathcal{D}$ est la droite qui est parallèle à (CD) et passe par O.

b. Déterminer les coordonnées du point G, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABD).

3. a. On note L le milieu du segment $[AC]$.
Démontrer que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC).

b. Prouver que le triangle ABC est équilatéral et déterminer le centre de son centre circonscrit.

4. Démontrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont les six arêtes ont la même longueur.

