Exercice 1 *(Polynésie - Juin 2014)*

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=e^x \quad ; \quad g(x)=2\cdot e^{\frac{x}{2}}-1$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.

2. Etude de la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ.
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=2\cdot e^{\frac{x}{2}}-x-2$

   a. Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

   b. Justifier que, pour tout réel x :
   $$h(x)=x\cdot\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}-1-\frac{2}{x}\right).$$
   En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

   c. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

   d. Dresser le tableau de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

   e. En déduire que, pour tout réel x : $2\cdot e^{\frac{x}{2}}-1\geqslant x-1$

   f. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ ?

3. Etude de la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

   a. Pour tout réel x, développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2$.

   b. Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

4. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

Correction 1

1. Par les fonctions f et g, on a les images suivantes :
$$f(0)=e^0=1 \quad ; \quad g(0)=2\cdot e^{\frac{0}{2}}-1=2\times 1-1=1$$
Le point de coordonnées $(0\,;1)$ est un point commun des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

   Déterminons que les tangentes au point d'abscisses 0 aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont même coefficient directeur :
   - La fonction f admet pour dérivée f' dont l'expression est :
   $f'(x)=e^x$.
   Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour valeur :
   $f'(0)=e^0=1$
   - L'expression de la fonction g est donnée sous la forme :
   $g(x)=2\cdot e^{\frac{x}{2}}-1$
   où la fonction u est définie par :
   $u(x)=\frac{x}{2} \quad ; \quad u'(x)=\frac{1}{2}$
   La formule de dérivation de la composée par la fonction exponentielle permet d'obtenir l'expression de la fonction g :
   $g'(x)=2\times\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{x}{2}}-0=e^{\frac{1}{2}}$
   Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ a pour valeur :
   $g'(0)=e^{\frac{0}{2}}=1$

   Ces deux tangentes passe par le même point de coordonnées $(0\,;1)$ et ont sont donc confondues.
   Elles ont pour équation réduite :
   $y=f'(0)\cdot(x-0)+f(0)$
   $y=1\cdot x+1$
   $y=x+1$

2. a. On a les limites suivantes :
   $$\lim_{x\mapsto-\infty}2\cdot e^{\frac{x}{2}}=0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty}-x-2=+\infty$$
   On en déduit la limite suivante :
   $$\lim_{x\mapsto-\infty}h(x)=\lim_{x\mapsto-\infty}2\cdot e^{\frac{x}{2}}-x-2=+\infty$$

   b. On a les transformations algébriques suivante :
   $$h(x)=2\cdot e^{\frac{x}{2}}-x-2=x\cdot\left(\frac{2\cdot e^{\frac{x}{2}}}{x}-1-\frac{2}{x}\right)$$
   $$=x\cdot\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x}-1-\frac{2}{x}\right)=x\cdot\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}-1-\frac{2}{x}\right)$$
   On a les limites suivantes :
   $$\lim_{x\mapsto+\infty}x=+\infty \;;\; \lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}=+\infty \;;\; \lim_{x\mapsto+\infty}-1-\frac{2}{x}=-1$$
   On en déduit la limite :
   $$\lim_{x\mapsto+\infty}h(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}x\cdot\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}-1-\frac{2}{x}\right)=+\infty$$

   c. En remarquant l'égalité : $h(x)=g(x)-x-1$
   On obtient l'expression de la fonction h' :
   $h'(x)=e^{\frac{x}{2}}-1$
   Déterminons le signe de la fonction h' sur $\mathbb{R}$:
   $$h'(x)\geqslant 0$$
   $$e^{\frac{x}{2}}-1\geqslant 0$$
   $$e^{\frac{x}{2}}\geqslant 1$$
   $$e^{\frac{x}{2}}\geqslant 1>0$$
   La fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:
   $$\ln\left(e^{\frac{x}{2}}\right)\geqslant\ln 1$$
   $$\frac{x}{2}\geqslant 0$$
   $$x\geqslant 0$$
   Ainsi, la fonction h' admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$

   d. L'image du nombre 0 par la fonction h a pour valeur :
   $$h(0)=2\cdot e^{\frac{0}{2}}-0-2=2\times 1-0-2=2-2=0$$
   On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de h	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

e. D'après le tableau de variation de la fonction précédente, la fonction h admet pour minimum la valeur 0 pour $x=0$. On en déduit que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h(x) &\geqslant 0 \\ 2\cdot e^{\frac{x}{2}} - x - 2 &\geqslant 0 \\ 2\cdot e^{\frac{x}{2}} &\geqslant x+2 \\ 2\cdot e^{\frac{x}{2}} - 1 &\geqslant x+1 \\ 2\cdot e^{\frac{x}{2}} - 1 &\geqslant x+1 \geqslant x-1 \\ 2\cdot e^{\frac{x}{2}} - 1 &\geqslant x-1 \end{aligned}$$

f. Pour étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et Δ, déterminons le signe de la différente :

$$\left(2\cdot e^{\frac{x}{2}} - 1\right) - (x-1)$$

Or, d'après la question précédente, on a la comparaison :

$$\begin{aligned} 2\cdot e^{\frac{x}{2}} - 1 &\geqslant x-1 \\ \left(2\cdot e^{\frac{x}{2}} - 1\right) - (x-1) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_g$ se situe au dessus de la droite Δ.

3. a. On a le développement :

$$\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 2\times e^{\frac{x}{2}}\times 1 + 1^2$$
$$= e^{2\times\frac{x}{2}} - 2\cdot e^{\frac{x}{2}} + 1 = e^x - 2\cdot e^{\frac{x}{2}} + 1$$

b. Pour étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, étudions le signe de la différence suivante :

$$f(x) - g(x) = e^x - \left(2\cdot e^{\frac{x}{2}} - 1\right) = e^x - 2\cdot e^{\frac{x}{2}} + 1$$

D'après la question précédente :

$$= \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 \geqslant 0$$

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ se situe toujours sur $\mathbb{R}$ au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.

4. D'après la question précédente, la différence $f(x)-g(x)$ est positive sur $[0\,;1]$. Ainsi, l'intégrale ci-dessous représente l'aire comprise entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$:

$$\int_0^1 f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^x - \left(2\cdot e^{\frac{x}{2}} - 1\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left[e^x - 2\times 2\cdot e^{\frac{x}{2}} + x\right]_0^1 = \left[e^x - 4\cdot e^{\frac{x}{2}} + x\right]_0^1$$
$$= \left(e^1 - 4\cdot e^{\frac{1}{2}} + 1\right) - \left(e^0 - 4\cdot e^{\frac{0}{2}} + 0\right)$$
$$= e^1 - 4\cdot e^{\frac{1}{2}} + 1 - 1 + 4 = e - 4\cdot e^{\frac{1}{2}} + 4$$

Exercice 2 *(Métropole - Juin 2014)*

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f_1(x) = x + e^{-x}$

1. Justifier que $\mathscr{C}_1$ passe par le point A de coordonnées $(0\,;1)$.

2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1. On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

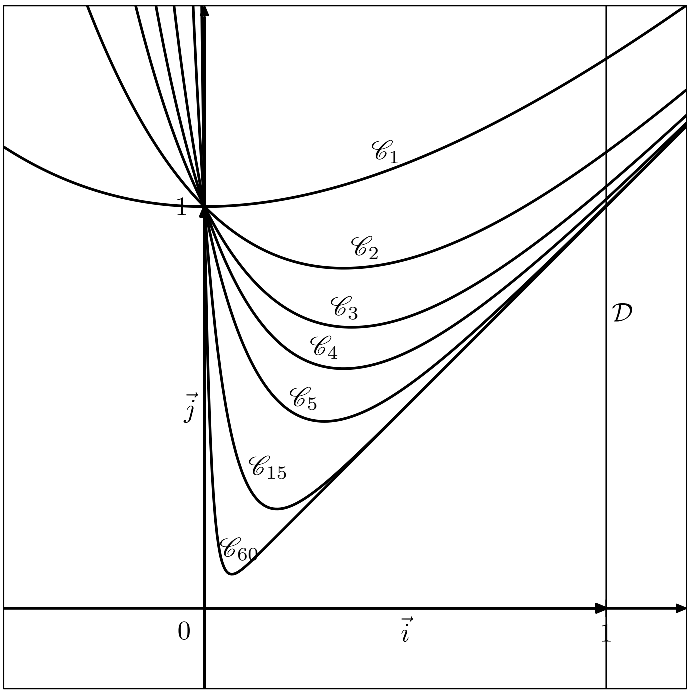
Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 \left(x + e^{-n\cdot x}\right)\mathrm{d}x$$

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f_n(x) = x + e^{-n\cdot x}$

   Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x=1$.



   a. Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.

   b. En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.
$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)\cdot x}\cdot\left(1 - e^{x}\right)\mathrm{d}x$$
En déduire le signe de $I_{n+1}-I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n).

Correction 2

Partie A

1. La fonction f_1 admet l'image suivante :
$f_1(0) = 0 + e^{-0} = 0 + 1 = 1$
On en déduit que le point de coordonnées $(0\,;1)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Etudions les deux limites suivantes :
   - Considérons la transformation algébrique suivante :
   $$f_1(x) = x + e^{-x} = -x\cdot\left(-1 + \frac{e^{-x}}{-x}\right)$$
   On a les deux limites suivantes :
   $$\lim_{x\mapsto-\infty} -x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} -1 + \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$$
   On en déduit la limite :
   $$\lim_{x\mapsto+\infty} f_1(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} -x\cdot\left(-1 + \frac{e^{-x}}{-x}\right) = +\infty$$
   - On a les deux limites suivantes :
   $$\lim_{x\mapsto+\infty} x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} e^{-x} = 0$$
   On en déduit la limite :
   $$\lim_{x\mapsto+\infty} f_1(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} x + e^{-x} = +\infty$$

   L'expression de la fonction f_1 est donnée sous la forme :
   $f(x) = x + e^{u(x)}$
   où la fonction u est définie par :
   $u(x) = -x \quad ; \quad u'(x) = -1.$

   La formule de dérivation de la composée par la fonction exponentielle permet d'obtenir l'expression de la fonction f_1 :
   $f_1'(x) = 1 + u'(x)\cdot e^{u(x)} = 1 + (-1)\cdot e^{-x} = 1 - e^{-x}$

   Etudions le signe de la fonction f_1' :
   $$f_1'(x) \geqslant 0$$
   $$1 - e^{-x} \geqslant 0$$
   $$-e^{-x} \geqslant -1$$
   $$e^{-x} \leqslant 1$$
   La fonction logarithme est strictement continue sur $\mathbb{R}_+$:
   $$\ln\left(e^{-x}\right) \leqslant \ln 1$$
   $$\ln\left(e^{-x}\right) \leqslant \ln 1$$
   $$-x \leqslant 0$$
   $$x \geqslant 0$$
   On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1. a. Sur l'intervalle $[0\,;1]$, la fonction f_n est positive, on en déduit que l'intégrale I_n représente l'aire definie entre la courbe $\mathscr{C}_{f_n}$ et l'axe des abscisses et comprise entre les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

   b. Il semble qu'au fur et à mesure que la valeur de n augmente, la courbe $\mathscr{C}_{f_n}$ se rapproche de l'axe des abscisses : l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses diminue.
   On peut conjecturer que la suite (I_n) de nombres réels est décroissante.

2. Etudions la différence :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \left(x + e^{-(n+1)\cdot x}\right) \mathrm{d}x - \int_0^1 \left(x + e^{-n\cdot x}\right) \mathrm{d}x$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$= \int_0^1 \left(x + e^{-(n+1)\cdot x}\right) - \left(x + e^{-n\cdot x}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 e^{-(n+1)\cdot x} - e^{-n\cdot x} \,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 e^{-(n+1)\cdot x}\cdot\left(1 - \frac{e^{-n\cdot x}}{e^{-(n+1)\cdot x}}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 e^{-(n+1)\cdot x}\cdot\left(1 - e^{-n\cdot x+(n+1)\cdot x}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 e^{-(n+1)\cdot x}\cdot\left(1 - e^{x}\right) \mathrm{d}x$$

Sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$, on a la comparaison :

$$e^x \geqslant 1$$
$$-\,e^x \leqslant -1$$
$$1 - e^x \leqslant 0$$

La fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$:

$$e^x\cdot\left(1 - e^x\right) \leqslant e^x\times 0$$
$$e^x\cdot\left(1 - e^x\right) \leqslant 0$$

Par la propriété de positivité de l'intégrale :

$$\int_0^1 e^x\cdot\left(1 - e^x\right) \leqslant 0$$
$$I_{n+1} - I_n \leqslant 0$$
$$I_{n+1} \leqslant I_n$$

On en déduit que la suite $\left(I_n\right)$ est décroissante.

De plus, $\left(I_n\right)$ est une suite de nombres réels positifs : la suite $\left(I_n\right)$ est minorée par la valeur 0.

D'après les théorèmes de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite $\left(I_n\right)$ est convergente.

3. Effectuons le calcul de l'intégrale I_n :

$$I_n = \int_0^1 x + e^{-n\cdot x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\cdot x^2 + \left(-\frac{1}{n}\right)\cdot e^{-n\cdot x}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{n}\cdot e^{-n\cdot x}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2}\times 1^2 - \frac{1}{n}\cdot e^{-n\times 1}\right) - \left(\frac{1}{2}\times 0^2 - \frac{1}{n}\cdot e^{-n\times 0}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\cdot e^{-n} + \frac{1}{n}\cdot e^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\cdot e^{-n} + \frac{1}{n}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{n}\cdot e^{-n} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} I_n = \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\cdot e^{-n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

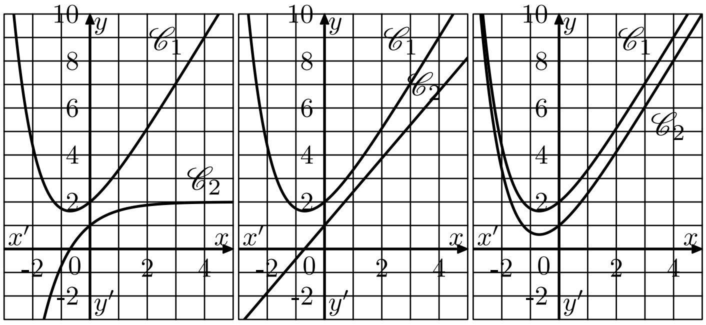
Exercice 3 *(Pondichéry- Avril 2014)*

Partie A

f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f.
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f'.
Le point A de coordonnées $(0\,;2)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_1$.
Le point B de coordonnées $(0\,;1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_2$.

1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de la fonction f. Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathscr{C}_2$ de la fonction dérivée f' est tracé convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.

Situation 1 Situation 2 Situation 3



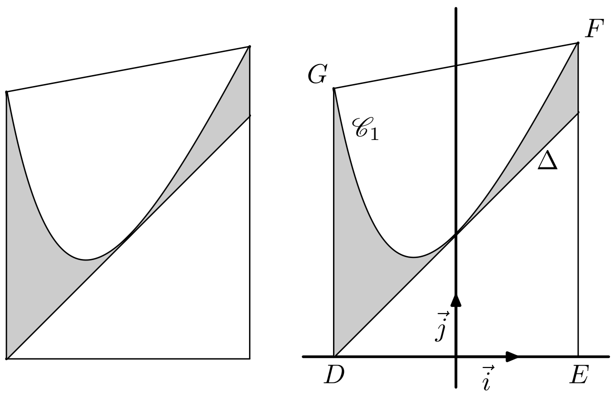
2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ en A.
3. On sait que pour tout réel x, $f(x)=e^{-x}+ax+b$ où a et b sont deux nombres réels.
   a. Déterminer la valeur de b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.
   b. Prouver que $a=2$.
4. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=f(x)-(x+2)$.

1. a. Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_1$ par rapport à la droite Δ

La figure 2 ci-dessous représente le logo d'un entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe $\mathscr{C}_1$ et de la droite Δ, comme l'indique la figure 3 ci-dessous. Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.



Le contour du logo est représenté par le trapèze $DEFG$ où :

- D est le point de coordonnées $(-2\,;0)$,
- E est le point de coordonnées $(2\,;0)$,
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe $\mathscr{C}_1$,
- G est le point d'abscisse -2 de la courbe $\mathscr{C}_2$.

La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}_1$, la droite d'équation $x=-2$ et la droite d'équation $x=2$.

2. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo colorée en gris *(on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} du résultat)*.

Correction 3

Partie A

1. C'est la situation 1 qui représente la courbe $\mathscr{C}_2$ car :
   - Dans la situation 2, la courbe $\mathscr{C}_2$ est la représentation d'une fonction affine : sa primitive sera la fonction carré. Or, la courbe $\mathscr{C}_1$ n'est pas la représentation de la fonction carré.
   - Dans la situation 3, la courbe $\mathscr{C}_1$ étant décroissante sur $]-\infty\,;\alpha[$, où $\alpha\simeq-0.5$, la dérivée de la fonction f doit être négative. Or, f' représenté par la courbe $\mathscr{C}_2$ proposée dans la situation 3 est positive sur cet intervalle.
2. D'après les données de l'énoncé :
   - Le point $A(0\,;2)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_1$. On en déduit :
     $f(0)=2.$
   - Le point $B(0\,;1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_2$. On en déduit :
     $f'(0)=1$

   Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_1$ admet pour tangente au point A qui a pour abscisse 0 :
   $y=f'(0)\cdot\big(x-0\big)+f(0)$
   $y=1\cdot\big(x-0\big)+2$
   $y=x+2$
3. a. On a vue que l'image de 0 par la fonction f vaut 2. Ainsi, les nombres a et b doivent vérifier l'équation suivante :
   $f(0)=e^{-0}+a\times0+b$
   $2=1+b$
   $b=2-1$
   $b=1$

   b. Ainsi, l'expression de la fonction f est :
   $f(x)=e^{-x}+a\cdot x+1$ où $a\in\mathbb{R}$ Ainsi, la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
   $f'(x)=-e^{-x}+a$
   Or, on a vu que $f'(0)=1$. Ainsi, le nombre a doit vérifier l'équation :
   $f'(0)=-e^{-0}+a$
   $1=-1+a$
   $a=1+1$
   $a=2$
4. D'après les question précédente, on a :
   - $f(x)=e^{-x}+2x+1$

- $f'(x) = -e^{-x} + 2$

Résolvons l'inéquation :

$$\begin{aligned} f'(x) &\geqslant 0 \\ -e^{-x} + 2 &\geqslant 0 \\ -e^{-x} &\geqslant -2 \\ e^{-x} &\leqslant 2 \\ 0 < e^{-x} &\leqslant 2 \end{aligned}$$

La fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \ln\left(e^{-x}\right) &\leqslant \ln 2 \\ -x &\leqslant \ln 2 \\ x &\geqslant -\ln 2 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f' admet pour tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

On en déduit :

- La fonction f est décroissante sur $\left]-\infty\,;-\ln 2\right[$;
- La fonction f est croissante sur $\left]-\ln 2\,;+\infty\right[$;

5. On a les limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} e^{-x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} 2x+1 = +\infty$$

Ainsi, on en déduit la limite :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} e^{-x} + 2x + 1 = +\infty$$

Partie B

1. a. On a la transformation algébrique suivante :

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - \big(x+2\big) = \big(e^{-x} + 2x + 1\big) - \big(x+2\big) \\ &= e^{-x} + 2x + 1 - x - 2 = e^{-x} + x - 1 \end{aligned}$$

La fonction g admet pour dérivée la fonction g' dont l'expression est :

$$g'(x) = -e^{-x} + 1$$

Résolvons l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned} g'(x) &\geqslant 0 \\ -e^{-x} + 1 &\geqslant 0 \\ -e^{-x} &\geqslant -1 \\ 0 < e^{-x} &\leqslant 1 \end{aligned}$$

La fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \ln\left(-e^{-x}\right) &\leqslant \ln 1 \\ -x &\leqslant 0 \\ x &\geqslant 0 \end{aligned}$$

On a le tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

L'image de 0 par la fonction g a pour valeur :

$$g(0) = f(0) - (0+2) = 2 - 2 = 0$$

Ainsi, la fonction g admet le tableau de variation :

x	-∞		0		$+\infty$
Variation de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit que la fonction g admet 0 pour minimum.

b. La fonction g admettant la valeur 0 pour minimum, on en déduit la comparaison suivante pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(x) &\geqslant 0 \\ f(x) - (x+2) &\geqslant 0 \\ f(x) &\geqslant x + 2 \end{aligned}$$

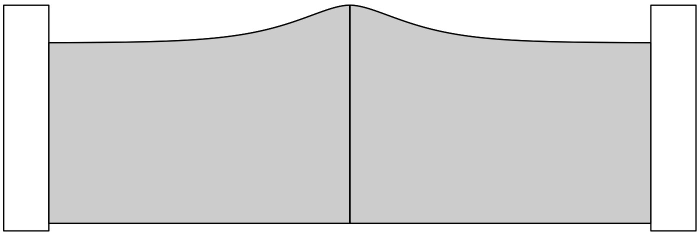
On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_1$ est toujours au dessus de la droite (Δ).

2. Le domaine considéré étant situé entre la courbe $\mathscr{C}_1$ et la droite Δ, on en déduit que son aire est définie par l'int̂egrale :

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{2} f(x) - (x+2)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{2} e^{-x} + 2x + 1 - x - 2\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} e^{-x} + x - 1\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-e^{-x} + \frac{1}{2}\cdot x^2 - x\right]_{-2}^{2} = -e^{-2} + 2 - 2 + e^{2} - 2 - 2 \\ &= e^{2} - e^{-2} - 4 \simeq 3{,}25 \end{aligned}$$

Exercice 4 *(Amérique du Sud - Novembre 2014)*

On désire réaliser un portail comme indiqué ci-dessous. Chaque vantail mesure 2 mètres de large.



Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail

On modélise le bord supérieur du vantail de droite du portail avec une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

$$f(x)=\Big(x+\frac{1}{4}\Big)\cdot e^{-4x}+b$$

où b est un nombre réel. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$.

1. a. Calculer $f'(x)$, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;2]$.

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$.

2. Déterminer le nombre b pour que la hauteur maximale du portail soit égale à $1{,}5\,m$.

Dans la suite la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

$$f(x)=\Big(x+\frac{1}{4}\Big)\cdot e^{-4x}+\frac{5}{4}$$

Partie B : détermination d'une aire

Chaque vantail est réalisé à l'aide d'une plaque métallique. On veut calculer l'aire de chacune des plaques, sachant que le bord inférieur du vantail est à $0{,}05\,m$ de hauteur du sol.

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

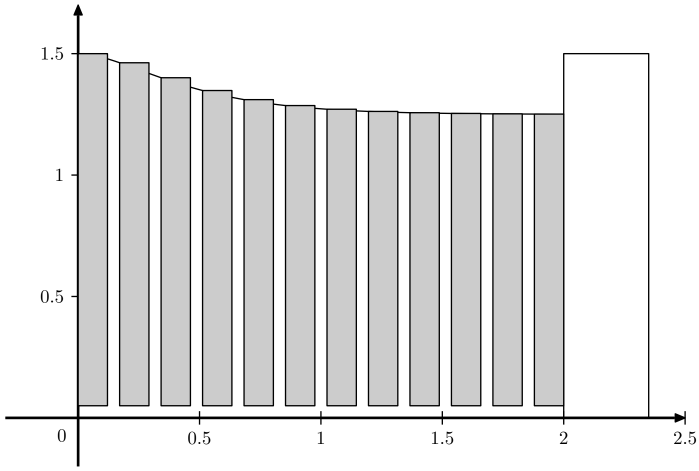
   $$F(x)=\Big(-\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\Big)\cdot e^{-4x}+\frac{5}{4}\cdot x$$

   est une primitive de la fonction f.

2. En déduire l'aire en m^2 de chaque vantail. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de cette aire. *(On s'intéresse ici à l'objet "vantail" sans faire référence à son environnement).*

Partie C : utilisation d'un algorithme

On désire réaliser un portail de même forme mais à partir de planches rectangulaires disjointes de largeur $0{,}12\,m$, espacées de $0{,}05\,m$. Pour le vantail de droite, le coin supérieur gauche de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail et le bas de chaque planche à $0{,}05\,m$ de hauteur. Les planches sont numérotées à partir de 0 : ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0.



La distance entre le bas du portail et le sol est de $0{,}05\,m$

1. Donner l'aire de la planche de numéro k.

2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la somme des aires des planches du vantail de droite.

Variables :	Les nombres X et S sont des nombres réels
Initialisation :	On affecte à S la valeur 0
	On affecte à X la valeur 0
Traitement :	**Tant que** $X+0{,}17<\ldots$
	S prend la valeur $S+\ldots$
	X prend la valeur $X+0{,}17$
	Fin de Tant Que
Affichage	On affiche S.

Correction 4

Partie A

1. a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :

   $u(x)=x+\dfrac{1}{4}$; $v(x)=e^{-4x}$

   qui admettent pour dérivée :

   $u'(x)=1$; $v'(x)=-4\cdot e^{-4x}$

   La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

   $$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)+0\\ &= 1\cdot e^{-4x}+\Big(x+\frac{1}{4}\Big)\cdot\big(-4\cdot e^{-4x}\big)\\ &= e^{-4x}-4\cdot\Big(x+\frac{1}{4}\Big)\cdot e^{-4x}=e^{-4x}\cdot\big(1-4\cdot x-1\big)\\ &= -4x\cdot e^{-4x}\end{aligned}$$

   b. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$-4x$	$+$	0 $-$		$-$
e^{-4x}	$+$	$+$		$+$
$f'(x)$		0 $-$		

   On en déduit que la fonction f' est négative sur $[0\,;2]$.

   La fonction f est décroissante sur $[0\,;2]$.

2. La fonction f étant décroissante sur $[0\,;2]$, on en déduit qu'elle atteint son maximum en 0.

   Ainsi, cherchons la condition pour qu'elle vérifie :

$$f(0) = 1{,}5$$
$$\left(0+\frac{1}{4}\right)\cdot e^{-4\times 0} + b = \frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{4}\times 1 + b = \frac{3}{2}$$
$$b = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}$$
$$b = \frac{5}{4}$$

Partie B

1. L'expression de la fonction F est donnée sous la forme :
$F(x) = u(x)\cdot v(x) + \frac{5}{4}\cdot x$
où les fonctions u et v définies par :
$u(x) = -\frac{x}{4} - \frac{1}{8} \quad ; \quad v(x) = e^{-4x}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = -\frac{1}{4} \quad ; \quad v'(x) = -4\cdot e^{-4x}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction F' :

$$\begin{aligned} F'(x) &= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) + \frac{5}{4} \\ &= -\frac{1}{4}\cdot e^{-4x} + \left(-\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(-4\cdot e^{-4x}\right) + \frac{5}{4} \\ &= -\frac{1}{4}\cdot e^{-4x} + \left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-4x} + \frac{5}{4} \\ &= e^{-4x}\cdot\left[-\frac{1}{4} + \left(x+\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{5}{4} \\ &= e^{-4x}\cdot\left(x+\frac{1}{4}\right) + \frac{5}{4} = f(x) \end{aligned}$$

On vient de monter que la dérivée de la fonction F est la fonction f : ainsi, la fonction F est une primitive de la fonction f.

2. Chaque vantail mesure 2 mètres de large et pour chaque $x\in[0\,;2]$, l'expression $f(x)-0{,}05$ est positive et définie la hauteur du vantail au point d'abscisse x.

Ainsi, l'aire de chaque vantail est donnée par l'intégrale :

$$\int_0^2 f(x) - 0{,}05\,\mathrm{d}x = \Big[F(x) - 0{,}05\cdot x\Big]_0^2$$
$$= \left[\left(-\frac{2}{4}-\frac{1}{8}\right)\cdot e^{-4\times 2} + \frac{5}{4}\times 2 - 0{,}05\times 2\right] - \left[\left(-\frac{0}{4}-\frac{1}{8}\right)\cdot e^{-4\times 0} + \frac{5}{4}\times 0 - 0{,}05\times 0\right]$$
$$= \left(-\frac{5}{8}\cdot e^{-8} + \frac{5}{2} - 0{,}1\right) - \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{5}{8}\cdot e^{-8} + \frac{20-0{,}8+1}{8}$$
$$= -\frac{5}{8}\cdot e^{-8} + \frac{20{,}2}{8} = -\frac{5}{8}\cdot e^{-8} + \frac{101}{40}$$

On a la valeur approchée :
$$\int_0^2 f(x) - 0{,}05 \simeq 2{,}52\,m^2$$

Partie C

1. L'abscisse du bord gauche de la planche 0 est 0.

Pour placer la planche k, donc la $(k{+}1)^e$, on a laissé sur la gauche k planches mesurant $0{,}12\,m$ avec k espace mesurant $0{,}05\,m$.
Ainsi, l'abscisse du bord gauche de la planche k est $0{,}17\times k$.

Ainsi, de manière générale, la planche k atteint une hauteur en partant du sol dont la valeur est $f\big(0{,}17\cdot k\big)$.

L'aire de cette planche est : $0{,}12\times\big[f(0{,}17\cdot k) - 0{,}05\big]$
$0{,}12\times f(0{,}17\cdot k) - 0{,}006$

2. Voici l'algorithme complété :

Variables :	Les nombres X et S sont des nombres réels
Initialisation :	On affecte à S la valeur 0
	On affecte à X la valeur 0
Traitement :	**Tant que** $X{+}0{,}17<2$
	S prend la valeur $S{+}0{,}12\times f(X){-}0{,}006$
	X prend la valeur $X{+}0{,}17$
	Fin de Tant Que
Affichage	On affiche S.

Exercice 5 *(Centres étrangers - Juin 2014)*

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés *(pixels)* dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de façon suivante :

- $x=0$ pour le blanc ;
- $x=1$ pour le noir ;
- $x=0{,}01$; $x=0{,}02$ et ainsi de suite jusqu'à $x=0{,}99$ par pas de $0{,}01$ pour toutes les nuances intermédiaires *(du clair au foncé)*.

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.
Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites "*fonctions de retouche*".
Une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ est dite "*fonction de retouche*" si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0)=0$;
- $f(1)=1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0\,;1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x)>x$, et éclaircie, si $f(x)<x$.

- si $f(x)=x^2$, un pixel de nuance codée $0{,}2$ prendra la nuance codée $0{,}2^2=0{,}04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
- Si $f(x)=\sqrt{x}$, la nuance codée $0{,}2$ prendra la nuance codée $\sqrt{0{,}2}\simeq 0{,}45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

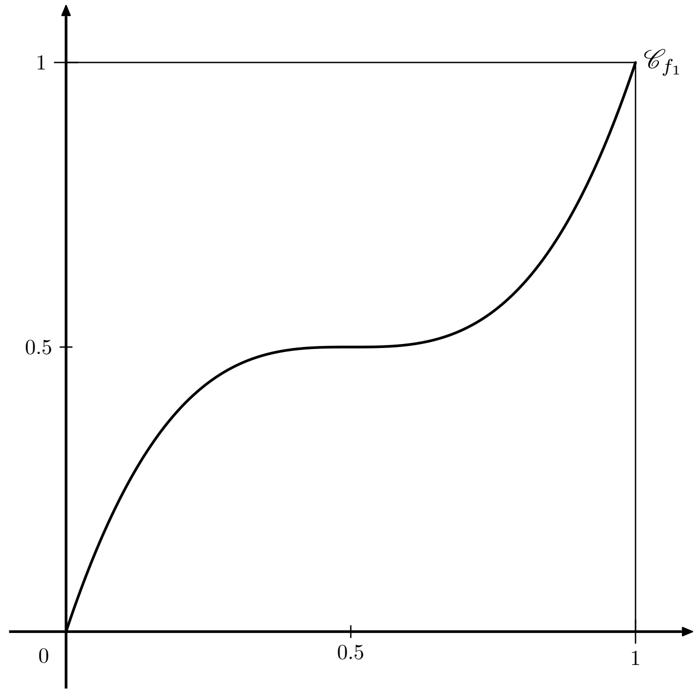
Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par : $f_1(x)=4x^3-6x^2+3x$

   a. Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

   b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x)\leqslant x$, à l'aide du graphique donné ci-dessous, en faisant apparaître les pointillés utiles.



   Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par : $f_2(x)=\ln\left[1+(e-1)\cdot x\right]$

   On admet que f_2 est une fonction de retouche.
   On définit sur l'intervalle $[0\,;1]$ la fonction g par : $g(x)=f_2(x)-x$.

   a. Etablir que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;1]$:
   $$g'(x)=\frac{(e-2)-(e-1)\cdot x}{1+(e-1)\cdot x}$$

   b. Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;1]$. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\dfrac{e-2}{e-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est $0{,}12$.

   c. Etablir que l'équation $g(x)=0{,}05$ admet sur l'intervalle $[0\,;1]$ deux solutions α et β, avec $\alpha<\beta$.

On admettra que : $0{,}08<\alpha<0{,}09$; $0{,}85<\beta<0{,}86$

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à $0{,}05$.

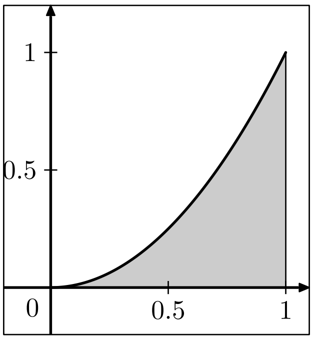
1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche.
   Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables : x *(nuance initiale)*
y *(nuance retouchée)*
E *(écart)*
c *(compteur)*
k
Initialisation : c prend la valeur 0
Traitement : Pour k allant de 0 à 100, faire
  x prend la valeur $\dfrac{k}{100}$
  y prend la valeur $f(x)$
  E prend la valeur $|y-x|$
  Si $E \geqslant 0{,}05$, faire
    c prend la valeur $c+1$
  Fin si
Fin pour
Sortie : Afficher c

2. Quelle valeur arrichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la partie **A** ?

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, $f(x) \leqslant x$.



On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire $\mathcal{A}_f$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image celle correspond à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouches :

$$f_3(x) = x \cdot e^{(x^2-1)} \quad ; \quad f_4(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}$$

1. a. Calculer $\mathcal{A}_{f_3}$.
   b. Calculer $\mathcal{A}_{f_4}$.
2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?

Correction 5 *(Centres étrangers - Juin 2014)*

Partie A

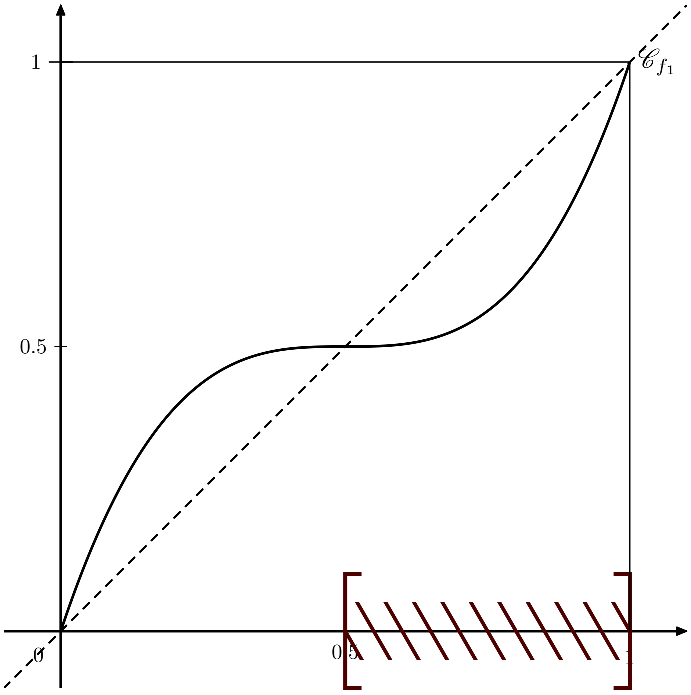
1. a. Pour montrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche, montrons qu'elle vérifie les quatre points d'une fonction de retouche :
   - $f_1(0) = 4\times0^3 - 6\times0^2 + 3\times0 = 0$
   - $f_1(1) = 4\times1^3 - 6\times1^3 + 3\times1 = 4 - 6 + 3 = 1$
   - La fonction f_1 est un polynôme qui est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   - La fonction f_1 admet pour dérivée :
     $f_1'(x) = 4\times3x^2 - 6\times2x + 3 = 12\cdot x^2 - 12\cdot x + 3$
     Le polynôme $12\cdot x^2 - 12x + 3$ admet pour discriminant :
     $\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-12)^2 - 4\times12\times3$
     $= 144 - 144 = 0$
     On a la valeur particulière : $-\dfrac{b}{2\cdot a} = -\dfrac{-12}{2\times12} = \dfrac{1}{2}$
     Le discriminant étant nul, on en déduit que ce polynôme a le même signe suivant sur $[0\,;1]$:

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f_1'(x)$	$+$	0	$+$

     On en déduit que la fonction f_1 est croissante sur $[0\,;1]$.

   Ainsi, la fonction f_1 est une fonction de retouche.

   b. On trace la droite d'équation $y=x$:



   Graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$ a pour solution l'intervalle $[0{,}5\,;1]$. Ainsi, sur cet intervalle, la valeur donnée par la retouche est inférieure à la valeur initiale, or la valeur la plus claire est la plus petite.
   Ainsi :
   - Pour des pixels dont la nuance est comprise entre $[0\,;0{,}5]$ la fonction f_1 de retouche assombrie la nuance ;
   - Pour des pixels dont la nuance est comprise entre $[0{,}5\,;1]$ la fonction f_1 de retouche éclaircie la nuance.

2. a. L'expression de la fonction g est donnée sous la forme :
   $g(x) = f_2(x) - x = \ln\big[u(x)\big] - x$
   où la fonction u est définie par :
   $u(x) = 1 + (e-1)\cdot x \quad ; \quad u'(x) = e - 1$
   La formule de dérivation de la composée d'une fonction par la fonction logarithme permet d'obtenir l'expression de la fonction g' :

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} - 1 = \frac{e-1}{1+(e-1)\cdot x} - 1$$
$$= \frac{e-1-1\cdot\big[1+(e-1)\cdot x\big]}{1+(e-1)\cdot x}$$
$$= \frac{e-1-1-(e-1)\cdot x}{1+(e-1)\cdot x} = \frac{(e-2)-(e-1)\cdot x}{1+(e-1)\cdot x}$$

   De la valeur approchée $e-1 \simeq 1{,}72$, on en déduit que le signe de g' ne dépend que de son numérateur. Etudions le signe du numérateur :

$$(e-2)-(e-1)\cdot x \geqslant 0$$

$$-(e-1)\cdot x \geqslant -(e-2)$$

Le nombre $-(e-1)$ étant négatif :

$$x \leqslant \frac{-(e-2)}{-(e-1)}$$

$$x \leqslant \frac{e-2}{e-1}$$

On a la valeur approchée : $\dfrac{e-2}{e-1} \simeq 0{,}418$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	0	$\frac{e-2}{e-1}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$

On a les images suivantes par la fonction g :

- $g(0) = f_2(0) - 0 = 0 - 0 = 0$
- $g(1) = f_2(1) - 1 = 1 - 1 = 0$

Ainsi, la fonction g admet le tableau de variation ci-dessous :

x	0	$\frac{e-2}{e-1}$	1
Variation de g		$0{,}12$	
	0		0

D'après le tableau de variation, la fonction g admet un maximum atteint en $\dfrac{e-2}{e-1}$

b. Effectuons deux raisonnements similaires :

- Sur l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{e-2}{e-1}\right]$:

  On a les deux images des bornes de l'intervalle :

  $f(0)=0 \quad ; \quad f\left(\dfrac{e-2}{e-1}\right) \simeq 0{,}12$

  De plus :

  - La fonction g est continue sur $\left[0\,;\dfrac{e-2}{e-1}\right]$
  - La fonction g est strictement croissante sur $\left[0\,;\dfrac{e-2}{e-1}\right]$
  - le nombre $0{,}05$ est compris entre les images par la fonction g aux bornes de l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{e-2}{e-1}\right]$.

  D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution α sur l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{e-2}{e-1}\right]$ tel que :

  $g(\alpha) = 0{,}05$.

- Sur l'intervalle $\left[\dfrac{e-2}{e-1}\,;1\right]$:

  On a les deux images aux bornes de l'intervalle :

  $g\left(\dfrac{e-2}{e-1}\right) \simeq 0{,}12 \quad ; \quad g(1)=0$

  De plus, on a :

  - g est continue sur l'intervalle $\left[\dfrac{e-2}{e-1}\,;1\right]$
  - g est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{e-2}{e-1}\,;1\right]$
  - le nombre $0{,}05$ est compris entre les images par la fonction g aux bornes de l'intervalle $\left[\dfrac{e-2}{e-1}\,;1\right]$.

  D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution β sur l'intervalle $\left[\dfrac{e-2}{e-1}\,;1\right]$ tel que :

  $g(\beta) = 0{,}05$.

De plus, de l'appartenance des deux nombres α et β à des sous intervalles de $[0\,;1]$, on en déduit que $\alpha < \beta$.

Partie B

1. Le compteur c s'initialise avec la valeur 0 et s'incrémente chaque fois que la $|f(x)-x|$ est supérieur à $0{,}05$.
Cet algorithme compte donc le nombre de nuances qui seront retouchées et dont la modification sera perceptible.

2. D'après le tableau de variation de la question **A.** 2. b. et les solutions de l'équation $f_2(x)-x = 0{,}05$ de la question **A.** 2. c., l'inéquation $f_2(x)-x \geqslant 0{,}05$ a pour ensemble de solution $[\alpha\,;\beta]$.

   Ainsi, seule les nuances ayant une valeur comprise entre $0{,}09$ et $0{,}85$ auront une modification perceptible : on compte au total 77 nuances.

   L'algorithme renverra la valeur 77.

Partie C

1. a. La fonction f_3 admet l'expression suivante :

   $$f_3(x) = \frac{1}{2}\times 2x\cdot e^{(x^2-1)}$$

   Considérons la fonction u définie par :

   $u(x) = x^2-1 \quad ; \quad u'(x) = 2x$

   On a ainsi l'expression suivante de la fonction f_3 :

   $$f_3(x) = \frac{1}{2}\times u'(x)\cdot e^{u(x)}$$

   Effectuons le calcul de $\mathcal{A}_{f_3}$:

   $$\int_0^1 f_3(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}\times u'(x)\cdot e^{u(x)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\cdot e^{u(x)}\right]_0^1$$

   $$= \frac{1}{2}\cdot e^{1^2-1} - \frac{1}{2}\cdot e^{0^2-1} = \frac{1}{2}\times e^0 - \frac{1}{2}\cdot e^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot e^{-1}$$

   b. Effectuons le calcul de $\mathcal{A}_{f_4}$:

   $$\int_0^1 f_4(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 4x - 15 + \frac{60}{x+4}\,\mathrm{d}x$$

   $$= \left[4\times\frac{1}{2}\cdot x^2 - 15\times x + 60\times\left(-\frac{1}{(x+4)^2}\right)\right]_0^1$$

   $$= \left[2\cdot x^2 - 15\cdot x + 60\cdot\ln(x+4)\right]_0^1$$

   $$= \left[2\times 1^2 - 15\times 1 + 60\cdot\ln(1+4)\right] - \left[2\times 0^2 - 15\times 0 - 60\cdot\ln(0+4)\right]$$

   $$= 2 - 15 + 60\cdot\ln 5 - 60\ln 4 = 2 - 15 + 60\cdot\ln\frac{5}{4}$$

   $$= -13 + 60\cdot\ln\frac{5}{4}$$

2. On a les deux valeurs approchées suivantes :

   $\mathcal{A}_{f_3} \simeq 0{,}316 \quad ; \quad \mathcal{A}_{f_4} \simeq 0{,}389$

   On en déduit la comparaison : $\mathcal{A}_{f_3} \leqslant \mathcal{A}_{f_4}$

   Ainsi, c'est la fonction de retouche f_3 qui éclaircie le plus une image.

Exercice 6 *(Asie - Juin 2014)*

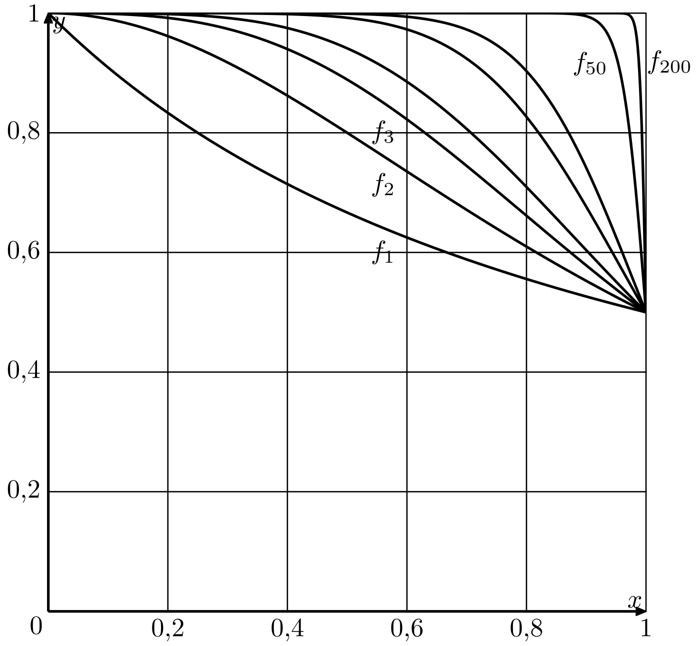
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre I_n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracés ci-après.
En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.



2. Calculer la valeur exacte de I_1.

3. a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :
$$\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$$
b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $I_n \leqslant 1$.

4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :
$$1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}$$

5. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 (1-x^n)\,\mathrm{d}x$.

6. A l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

7. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n, p et k sont des entiers naturels. x et I sont des réels.
Initialisation :	I prend la valeur 0.
Traitement :	Demander un entier $n \geqslant 1$. Demander un entier $p \geqslant 1$. Pour k allant de 0 à $p-1$ faire : x prend la valeur $\dfrac{k}{p}$ I prend la valeur $I + \dfrac{1}{1+x^n} \times \dfrac{1}{p}$ Fin Pour Afficher I

a. Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n=2$ et $p=5$?
On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

b. Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n.

Correction 6

1. Les fonctions f_n semblent positive sur l'intervalle $[0\,;1]$. Ainsi, l'intégrale I_n définit l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_{f_n}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

De plus, on observe que les courbes des fonctions $\mathscr{C}_n$ sont placés les unes au dessus des autres. Ainsi, les aires définies par ces courbes doivent croître en fonction de n : on peut conjecturer que la suite (I_n) est une suite croissante de nombres.

Toutes les courbes sont contenues dans un carré de côté 1 : ainsi, les valeurs de (I_n) sont majorées par 1.

On peut conjecturer que la suite (I_n) est convergente.

2. L'expression de la fonction f peut s'exprimer par :
$$f_1(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$
où la fonction u est définie par :
$$u(x) = x+1 \quad ; \quad u'(x) = 1$$
On en déduit l'expression d'une primitive F_1 de la fonction f_1 :
$$F_1(x) = \ln\big[u(x)\big] = \ln(x+1)$$
Ainsi, on a le calcul de l'intégrale I_1 :
$$I_1 = \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \big[F_1(x)\big]_0^1 = \big[\ln(x+1)\big]_0^1$$
$$= \ln(1+1) - \ln(0+1) = \ln(2) - \ln(1) = \ln 2$$

3. a. Pour tout entier naturel n non-nul, on a la comparaison suivante pour tout réel $x \in [0\,;1]$:

$$x^n \geqslant 0$$
$$1+x^n \geqslant 1$$

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{1}$$

b. Pour tout entier naturel n non-nul et pour tout réel $x \in [0\,;1]$, on a la comparaison :

$$\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$$

Par la propriété de positivité de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}x$$
$$I_n \leqslant \big[x\big]_0^1$$
$$I_n \leqslant 1-0$$
$$I_n \leqslant 1$$

4. Soit n un entier naturel non-nul. Etudions la différence :

$$\big(1-x^n\big)-\frac{1}{1+x^n} = \frac{\big(1-x^n\big)\big(1+x^n\big)-1}{1+x^n}$$
$$= \frac{1^2-\big(x^n\big)^2-1}{1+x^n} = \frac{1-x^{2n}-1}{1+x^n} = \frac{-x^{2n}}{1+x^n}$$

Sur l'intervalle $[0\,;1]$, on a la comparaison :

$$\frac{-x^{2n}}{1+x^n} \leqslant 0$$
$$\big(1-x^n\big)-\frac{1}{1+x^n} \leqslant 0$$
$$1-x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}$$

5. On a le calcul intégral suivant :

$$\int_0^1 \big(1-x^n\big)\,\mathrm{d}x = \Big[x-\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}\Big]_0^1$$
$$= \Big(1-\frac{1}{n+1}\times 1^{n+1}\Big)-\Big(0-\frac{1}{n+1}\times 0^{n+1}\Big) = 1-\frac{1}{n+1}$$

6. Etudions la différence :

$$I_{n+1}-I_n = \int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Par la propriété de linéarité de l'intégrale :

$$= \int_0^1 f_{n+1}(x)-f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}}-\frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{1+x^n}{\big(1+x^{n+1}\big)\big(1+x^n\big)}-\frac{1+x^{n+1}}{\big(1+x^n\big)\big(1+x^{n+1}\big)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{\big(1+x^n\big)-\big(1+x^{n+1}\big)}{\big(1+x^n\big)\big(1+x^{n+1}\big)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{1+x^n-1-x^{n+1}}{\big(1+x^n\big)\big(1+x^{n+1}\big)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n-x^{n+1}}{\big(1+x^n\big)\big(1+x^{n+1}\big)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{x^n\big(1-x\big)}{\big(1+x^n\big)\big(1+x^{n+1}\big)}\,\mathrm{d}x$$

Or, dans chacun des facteurs de l'expression :

$$\frac{x^n\big(1-x\big)}{\big(1+x^n\big)\big(1+x^{n+1}\big)}$$

est positif. On en déduit la comparaison suivante sur $[0\,;1]$:

$$\frac{x^n\big(1-x\big)}{\big(1+x^n\big)\big(1+x^{n+1}\big)} \geqslant 0$$

Par la propriété de positivité de l'intégrale :

$$I_{n+1}-I_n \geqslant 0$$
$$I_{n+1} \geqslant I_n$$

Ainsi, la suite $\big(I_n\big)$ est une suite croissante.

D'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite $\big(I_n\big)$ est convergente.

7. Des questions 3. a. et 4., on obtient l'encadrement suivant pour tout nombre réel $x \in [0\,;1]$:

$$1-x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$$

Par la propriété de positivité de l'intégrale :

$$\int_0^1 1-x^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}x$$
$$1-\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \big[x\big]_0^1$$
$$1-\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1-0$$
$$1-\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} 1-\frac{1}{n+1} = 1 \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty} 1 = 1$$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} I_n = 1.$$

8. a. Voici le tableau complété :

k	x	I
0	$\frac{1}{5}$	0,2
1	$\frac{1}{10}$	0,3
2	$\frac{1}{25}$	0,34
3	$\frac{1}{50}$	0,36
4	$\frac{1}{85}$	0,372

b. Cette algorithme présente la méthode d'approximation d'une surface par pavage de rectangle : appelé également méthode des rectangles ou intégrale de Riemann.

Exercice 7 *(Pondichéry - Avril 2014)*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0=1\quad;\quad z_{n+1}=\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\right)\cdot z_n\quad\text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On définit la suite $\left(r_n\right)$ par :

$r_n=|z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe : $\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot i$.

2. a. Montrer que $\left(r_n\right)$ est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   b. En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

   c. Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée :	Demander la valeur de P

Traitement :	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $R>P$
	  n prend la valeur $n+1$
	  R prend la valeur $\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$
	Fin tant que

Sortie :	Afficher n

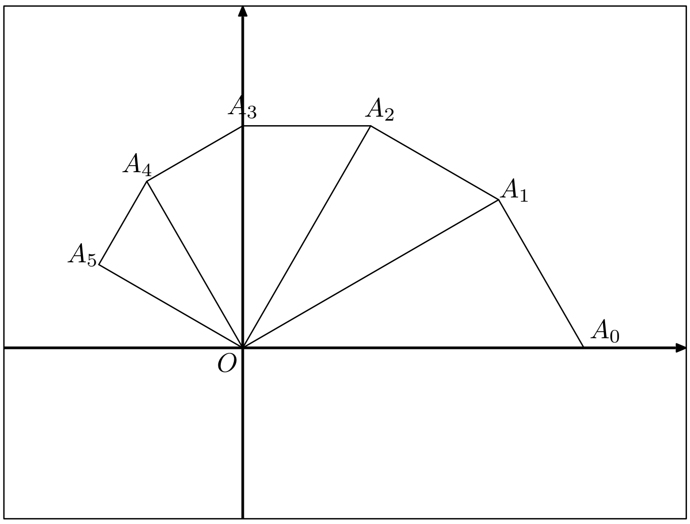
   a. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P=0{,}5$?

   b. Pour $P=0{,}01$, on obtient $n=33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

4. a. Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

   b. On admet que : $z_n=r_n\cdot e^{i\cdot\frac{n\pi}{6}}$
   Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

   c. Compléter la figure donnée ci-dessous en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.
   Les traits de construction seront apparents.



Correction 7

1. On a le module :

$$\left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{3}{16}}$$
$$=\sqrt{\frac{12}{16}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi, le nombre complexe admet pour expression :

$$\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot i\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}$$

2. a. La définition de la suite $\left(r_n\right)$ donne pour les modules :

$$z_{n+1}=\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\right)\cdot z_n$$
$$\left|z_{n+1}\right|=\left|\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\right)\cdot z_n\right|$$
$$r_{n+1}=\left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\right|\cdot\left|z_n\right|$$
$$r_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot r_n$$

On vient de montrer que la suite $\left(r_n\right)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   b. On a :
   $z_0=1\quad\Longrightarrow\quad\left|z_0\right|=1\quad\Longrightarrow\quad r_0=1$
   Ainsi, la suite $\left(r_n\right)$ est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Le terme de rang n, on a :

$$r_n=1\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

   c. Le module du complexe z_n représente la distance OA_n.
   Du fait que $0\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1$, on a la limite :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=0$$

   On en déduit la limite : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}OA_n=0$.

3. a. Voici un tableau affichant les valeurs des variables pendant l'exécution de la boucle *Tant que* :

	Initialisation	Boucle 1	Boucle 2	Boucle 3	Boucle 4	Boucle 5
R	1	0,865	0,75	0,650	0,562	0,487
n	0	1	2	3	4	5

   Ainsi, la valeur affichée par l'algorithme sera la valeur 5.

   b. Cet algorithme permet d'afficher le rang du premier terme de la suite $\left(r_n\right)$ passant sous la valeur P.
   Ainsi, il affiche le rang du premier point A_n se trouvant dans le disque de centre O et de rayon P.

4. a. Etudions le quotient :

$$\frac{z_n - z_{n+1}}{0 - z_{n+1}} = \frac{z_n - \Big(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\Big)\cdot z_n}{\Big(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\Big)\cdot z_n} = \frac{\Big[1 - \Big(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\Big)\Big]\cdot z_n}{\Big(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\Big)\cdot z_n}$$

$$= \frac{1 - \Big(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\Big)}{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i} = \frac{1 - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i}{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i}{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{3}\cdot i}{3 + \sqrt{3}\cdot i} = \frac{(1 - \sqrt{3}\cdot i)\cdot(3 - \sqrt{3}\cdot i)}{(3 + \sqrt{3}\cdot i)\cdot(3 - \sqrt{3}\cdot i)}$$

$$= \frac{3 - \sqrt{3}\cdot i - 3\sqrt{3}\cdot i + \big(\sqrt{3}\big)^2\cdot i^2}{9+3} = \frac{3 - (3+\sqrt{3})\cdot i - 3}{12}$$

$$= \frac{(3+\sqrt{3})\cdot i}{12} = \frac{3+\sqrt{3}}{12}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$$

On en déduit la valeur de l'argument de ce quotient :

$$\arg\Big(\frac{z_n - z_{n+1}}{0 - z_{n+1}}\Big) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Big(\overrightarrow{A_{n+1}O}\,;\overrightarrow{A_{n+1}A_n}\Big) = \frac{\pi}{2}$$

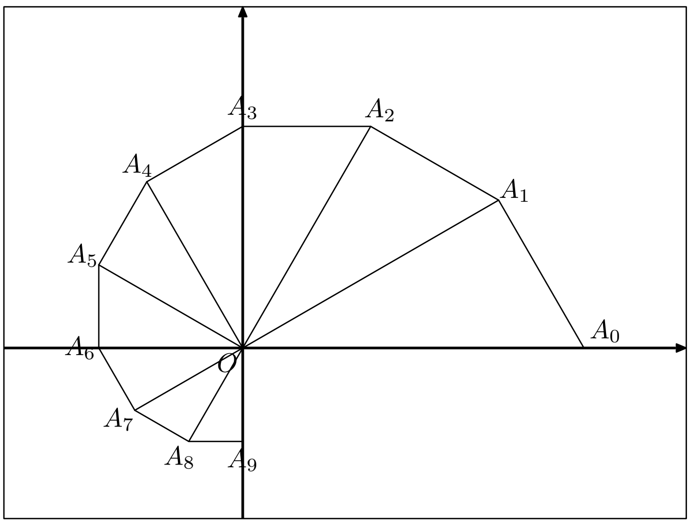
b. Pour que le point A_n appartiennent à l'axe des ordonnées, il est nécessaire que l'argument du complexe z_n ait pour expression :

$\arg z_n = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$	$\arg z_n = -\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$
$n\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$	$n\cdot\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$
$\frac{n}{6} = \frac{1}{2} + k$	$\frac{n}{6} = -\frac{1}{2} + k$
$n = 6\times\Big(\frac{1}{2} + k\Big)$	$n = 6\times\Big(-\frac{1}{2} + k\Big)$
$n = 3 + 6\cdot k$	$n = -3 + 6\cdot k$

On obtient l'ensemble des entiers naturel n tels que A_n appartiennent à l'axe des ordonnées :

$\mathcal{S} = \big\{3\,;\,6\,;\,9\,;\,12\ldots\big\}$

c. Voici la figure complétée :



Exercice 8 *(Antilles-Guyanne - Septembre 2014)*

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$. On prendra comme unité $2\,cm$ sur chaque axe.
Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe :
$$f(z) = z^2 + 2{\cdot}z + 9$$

1. Calculer l'image de $-1+i{\cdot}\sqrt{3}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z)=5$.
Ecrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation

   Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation *(A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive)*.
On laissera les traits de construction apparents.

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z)=\lambda$ d'inconnue z.
Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z)=\lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $|f(z)-8|=3$

   Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\,;0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
Tracer (F) sur le graphique.

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z=x+i{\cdot}y$ où x et y sont des nombres réels.
   a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est :
   $\big(x^2-y^2+2{\cdot}x+9\big)+i{\cdot}\big(2{\cdot}x{\cdot}y+2{\cdot}y\big)$.
   b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
   Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

Correction 8

1. On a l'image :
$$f\big(-1+i{\cdot}\sqrt{3}\big) = \big(-1+i{\cdot}\sqrt{3}\big)^2 + 2{\cdot}\big(-1+i{\cdot}\sqrt{3}\big)+9$$
$$= \Big[(-1)^2 + 2\times(-1)\times i{\cdot}\sqrt{3} + \big(i{\cdot}\sqrt{3}\big)^2\Big] - 2 + 2{\cdot}i{\cdot}\sqrt{3}+9$$
$$= 1 - 2\sqrt{3}{\cdot}i - 3 - 2 + 2{\cdot}i{\cdot}\sqrt{3} + 9 = 5$$

2. Résolvons l'équation :
$$f(z) = 5$$
$$z^2+2{\cdot}z+9 = 5$$
$$z^2+2{\cdot}z+9-5 = 0$$
$$z^2+2{\cdot}z+4 = 0$$
Le polynôme $z^2{+}2{\cdot}z{+}4$ admet pour discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 2^2 - 4\times1\times4 = 4-16 = -12$$
On a la simplification :
$$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
Le discriminant étant strictement négatif, cette équation admet les deux solutions complexes suivantes :

$$z_1 = \frac{-b-i{\cdot}\sqrt{-\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2-2\sqrt{3}{\cdot}i}{2\times1} = \frac{2{\cdot}\big(-1-\sqrt{3}{\cdot}i\big)}{2} = -1-\sqrt{3}{\cdot}i = 2{\cdot}\Big(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}{\cdot}i\Big) = 2{\cdot}\Big[\cos\Big(\text{-}\frac{2\pi}{3}\Big)+i{\cdot}\sin\Big(\text{-}\frac{2\pi}{3}\Big)\Big] = 2{\cdot}e^{-i{\cdot}\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_2 = \frac{-b+i{\cdot}\sqrt{-\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2+2\sqrt{3}{\cdot}i}{2\times1} = \frac{2{\cdot}\big(-1+\sqrt{3}{\cdot}i\big)}{2} = -1+\sqrt{3}{\cdot}i = 2{\cdot}\Big(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}{\cdot}i\Big) = 2{\cdot}\Big[\cos\Big(\frac{2\pi}{3}\Big)+i{\cdot}\sin\Big(\frac{2\pi}{3}\Big)\Big] = 2{\cdot}e^{-i{\cdot}\frac{\pi}{3}}$$

3. Considérons l'équation :
$$f(z) = \lambda$$
$$z^2+2{\cdot}z+9 = \lambda$$
$$z^2+2{\cdot}z+\big(9-\lambda\big) = 0$$
Le polynôme du membre de gauche a pour discriminant :
$$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 2^2 - 4\times1{\cdot}\big(9-\lambda\big) = 4-36+4{\cdot}\lambda$$
$$= -32+4{\cdot}\lambda$$
Ce polynôme admettra deux racines complexes conjuguées si son discriminant est strictement négatif :
$$\Delta < 0$$
$$-32+4{\cdot}\lambda < 0$$
$$4{\cdot}\lambda < 32$$
$$\lambda < \frac{32}{4}$$
$$\lambda < 8$$
Ainsi, il faut que la valeur de λ est strictement inférieur à 8 pour que l'équation $f(z)=\lambda$ admettent deux solutions complexes conjugués.

4. Soit z un nombre complexe. On a les équivalences suivantes :
$$M \text{ appartient à } (F) \iff \big|f(z)-8\big| = 3$$
$$\iff \big|\big(z^2+2{\cdot}z+9\big)-8\big| = 3 \iff \big|z^2+2{\cdot}z+1\big| = 3$$
$$\iff \Big|\big(z+1\big)^2\Big| = 3 \iff \big|z+1\big|^2 = 3$$
$$\iff \big|z-(-1)\big| = \sqrt{3} \iff \big|z_M - z_\Omega\big| = \sqrt{3}$$
$$\iff \Omega M = \sqrt{3}$$
Ainsi, l'ensemble (F) est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{3}$.

5. a. L'image $f(z)$ admet pour expression :
$$f(z) = \big(x+i{\cdot}y\big)^2 + 2{\cdot}\big(x+i{\cdot}y\big)+9$$
$$= x^2+2xy{\cdot}i+\big(i{\cdot}y\big)^2+2{\cdot}x+2y{\cdot}i+9$$
$$= x^2+2xy{\cdot}i-y^2+2{\cdot}x+2y{\cdot}i+9$$
$$= \big(x^2-y^2+2{\cdot}x+9\big)+i{\cdot}\big(2xy+2y\big)$$
   b. Pour que $f(z)$ soit un nombre réel, il est nécessaire que sa partie imaginaire soit nulle. Etudions l'équation suivante :

$2{\cdot}x{\cdot}y+2{\cdot}y=0$

$2{\cdot}y{\cdot}\big(x+1\big)=0$

Dans $\mathbb{C}$, un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$2{\cdot}y=0$	$x+1=0$
$y=0$	$x=-1$

Etudions ces deux cas :

- L'ensemble des nombres vérifiant $y=0$ représente l'axe des abscisses.
- L'ensemble des nombres vérifiant $x=1$ est une droite verticale.

6. Soit z un point appartenant à l'ensemble (F), on a :

$$\big|z-(-1)\big|=\sqrt{3}$$

$$\big|z+1\big|^2=3$$

Notons $z=x+i{\cdot}y$ l'écriture algébrique de z :

$$\big|\big(x+i{\cdot}y\big)+1\big|^2=3$$

$$\big|\big(x+1\big)+i{\cdot}y\big|^2=3$$

$$(x+1)^2+y^2=3$$

$$x^2+2x+1+y^2=3$$

Déterminons les coordonnées des points d'intersection de (F) avec les deux droites D_1 et D_2 :

- Si $x=-1$:

$$x^2+2x+1+y^2=3$$

$$(-1)^2+2\times(-1)+1+y^2=3$$

$$1-2+1+y^2=3$$

$$y^2=3$$

Les deux points d'intersection avec cette droite ont pour affixe :

$z_1=-1+\sqrt{3}{\cdot}i \quad ; \quad z_2=-1-\sqrt{3}{\cdot}i$

- Si $y=0$:

$$x^2+2x+1+0^2=3$$

$$x^2+2x+1-3=0$$

$$x^2+2x-2=0$$

Ce polynôme a pour discriminant :

$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=2^2-4\times1\times(-2)=4+8=12$

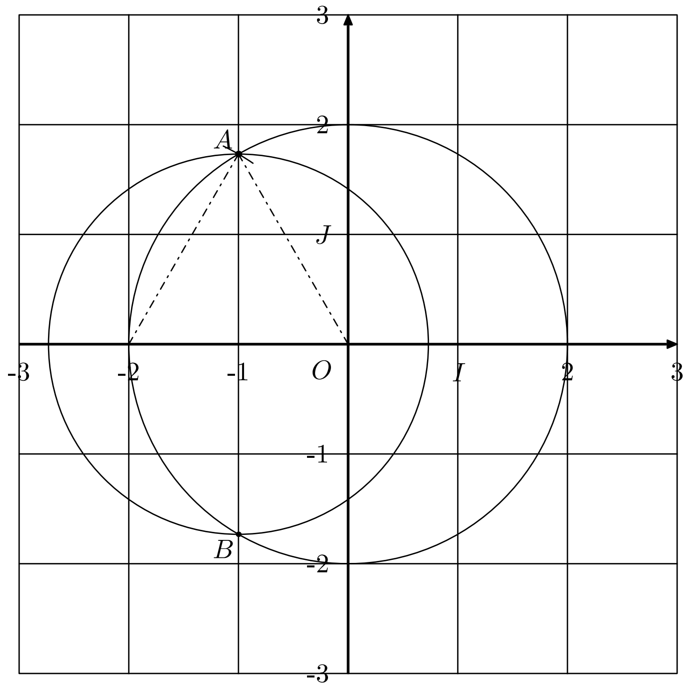
On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines réelles :

$x_3=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$	$x_4=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$
$=\dfrac{-2-2\sqrt{3}}{2\times1}$	$=\dfrac{-2+2\sqrt{3}}{2\times1}$
$=\dfrac{2{\cdot}\big(-1-\sqrt{3}\big)}{2}$	$=\dfrac{2{\cdot}\big(-1+\sqrt{3}\big)}{2}$
$=-1-\sqrt{3}$	$=-1+\sqrt{3}$

Voici les affixes des deux points d'intersection de l'ensemble (F) avec la droite D_2 :

$z_3=-1-\sqrt{3} \quad ; \quad z_4=-1+\sqrt{3}$



Exercice 9 *(Métropole - Juin 2014)*

On désigne par (E) l'équation $z^4+4z^2+16=0$ d'inconnue complexe z.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2+4\cdot Z+16=0$.
Ecrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.

2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\frac{\pi}{3}$.
Calculer a^2 sous forme algébrique.
En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^2=-2+2\cdot i\cdot\sqrt{3}$.
On écrira les solutions sous forme algébrique.

3. **Restitution organisée de connaissances**
On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z=x+i\cdot y$ où $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z}$ définie par $\overline{z}=x-i\cdot y$.
Démontrer que :
   - Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.
   - Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n : $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$.

4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\overline{z}$ est également une solution de (E).
En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

Correction 9 *(Métropole - Juin 2014)*

1. Le polynôme $Z^2+4\cdot Z+16$ admet pour discriminant :
$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=4^2-4\times1\times16=16-64=-48$
On a la simplification : $\sqrt{-\Delta}=\sqrt{48}=4\cdot\sqrt{3}$
Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme admet les deux racines complexes suivantes :

$$z_1=\frac{-b-i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-4-i\cdot4\sqrt{3}}{2\times1}=\frac{2\cdot\left(-2-i\cdot2\sqrt{3}\right)}{2}=-2-i\cdot2\sqrt{3}$$

$$z_2=\frac{-b+i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-4+i\cdot4\sqrt{3}}{2\times1}=\frac{2\cdot\left(-2+i\cdot2\sqrt{3}\right)}{2}=-2+i\cdot2\sqrt{3}$$

Ainsi, cette équation admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S}=\left\{-2-i\cdot2\sqrt{3}\,;\,-2-i\cdot2\sqrt{3}\right\}$

2. D'après la définition de a, on a : $a=2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}$
Ainsi, on a :

$$a^2=\left(2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\right)^2=4\cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}$$
$$=4\cdot\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]=4\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=-2+i\cdot2\sqrt{3}$$

Le nombre complexe a admet pour écriture algébrique :

$$a=2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}=2\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$=2\cdot\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\cdot\sqrt{3}$$

Considérons l'équation suivante :

$$z^2=-2+2\cdot i\cdot\sqrt{3}$$
$$z^2=a^2$$
$$z^2-a^2=0$$
$$\left(z+a\right)\left(z-a\right)=0$$

Un produit est nul si, et seulement si au moins un de ses facteurs est nul :

$$z+a=0 \qquad z=-a \qquad z=-\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right) \qquad z=-1-i\cdot\sqrt{3}$$

$$z-a=0 \qquad z=a \qquad z=1+i\cdot\sqrt{3}$$

Ainsi, cette équation admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S}=\left\{-1-i\cdot\sqrt{3}\,;\,1+\sqrt{3}\right\}$

3. Considérons les deux écritures algébriques des nombres complexes z_1 et z_2 :
$z_1=x+i\cdot y \quad ; \quad z_2=x'+i\cdot y'$
   - Etudions les deux membres de l'égalité :
     - $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{\left(x+i\cdot y\right)\left(x'+i\cdot y'\right)}$
     $=\overline{x\cdot x'+i\cdot x\cdot y'+i\cdot x'\cdot y+i^2\cdot y\cdot y'}$
     $=\overline{\left(x\cdot x'-y\cdot y'\right)+i\cdot\left(x\cdot y'+x'\cdot y\right)}$
     $=\left(x\cdot x'-y\cdot y'\right)-i\cdot\left(x\cdot y'+x'\cdot y\right)$
     $=\left(x\cdot x'-y\cdot y'\right)+i\cdot\left(-x\cdot y'-x'\cdot y\right)$
     - $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\left(\overline{x+i\cdot y}\right)\cdot\left(\overline{x'+i\cdot y'}\right)$
     $=\left(x-i\cdot y\right)\cdot\left(x'-i\cdot y'\right)$
     $=x\cdot x'-i\cdot x\cdot y'-i\cdot x'\cdot y+i^2\cdot y\cdot y'$
     $=\left(x\cdot x'-y\cdot y'\right)+i\cdot\left(-x\cdot y'-x'\cdot y\right)$

     On vient d'établir l'égalité : $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
   - Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :
     $\mathcal{P}_n$: "$\overline{z^n}=\overline{z}^n$"
     Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non-nul.
     - **Initialisation :**
     On a : $\overline{z^1}=\overline{z} \quad ; \quad \overline{z}^1=\overline{z}$
     On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.
     - **Hérédité :**
     Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n non-nul quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence suivante :
     $\overline{z^n}=\overline{z}^n$
     On a les transformations algébriques suivantes :
     $\overline{z^{n+1}}=\overline{z^n\cdot z}$
     D'après la propriété précédente :
     $=\overline{z^n}\cdot\overline{z}$
     D'après l'hypothèse de récurrence :
     $=\overline{z}^n\cdot\overline{z}=\overline{z}^{n+1}$
     On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.
     - **Conclusion :**
     La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 1 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non-nul.

4. Soit z une solution de l'équation (E). On a :
$z^4+4\cdot z^2+16=0$
Etudions l'expression suivante :

$\left(\overline{z}\right)^4 + 4{\cdot}\left(\overline{z}\right)^2 + 16$

A l'aide de la seconde propriété de la question 3. :

$= \overline{z^4} + 4{\cdot}\overline{z^2} + 16$

A l'aide de la première propriété de la question 3. :

$= \overline{z^4} + \overline{4{\cdot}z^2} + 16$

Le nombre 16 étant réel : $\overline{16} = 16$

$= \overline{z^4} + \overline{4{\cdot}z^2} + \overline{16} = \overline{z^4 + 4{\cdot}z^2 + 16}$

Le complexe z est solution de (E) :

$= \overline{0} = 0$

Ainsi, $\overline{z}$ est une solution de (E).

Montrons que a et $-a$ sont deux solutions de l'équation (E) :

- $a^4 + 4{\cdot}a^2 + 16 = \left(a^2\right)^2 + 4{\cdot}a^2 + 16$

  $= \left(-2 + 2{\cdot}i{\cdot}\sqrt{3}\right)^2 + 4{\cdot}\left(-2 + 2{\cdot}i{\cdot}\sqrt{3}\right) + 16$

  D'après la question 1. :

  $= 0$

- $(-a)^4 + 4{\cdot}(-a)^2 + 16 = \left[(-a)^2\right]^2 + 4{\cdot}(-a)^2 + 16$

  $= \left(-2 + 2{\cdot}i{\cdot}\sqrt{3}\right)^2 + 4{\cdot}\left(-2 + 2{\cdot}i{\cdot}\sqrt{3}\right) + 16$

  D'après la question 1. :

  $= 0$

D'après la propriété montrée en début de cette question, les conjugués de ces nombres complexes sont également solutions de l'équation (E) ; on obtient deux nouvelles solutions de l'équation (E) :

- $\overline{a} = \overline{-2 + 2{\cdot}i{\cdot}\sqrt{3}} = -2 - 2{\cdot}i{\cdot}\sqrt{3}$
- $\overline{-a} = \overline{-(-2 + 2{\cdot}i{\cdot}\sqrt{3})} = \overline{2 - 2{\cdot}i{\cdot}\sqrt{3}} = 2 + 2{\cdot}i{\cdot}\sqrt{3}$

Voici l'ensemble des solutions de l'équation (E) :

$\mathcal{S} = \left\{-2-2{\cdot}i{\cdot}\sqrt{3}\ ;\ -2+2{\cdot}i{\cdot}\sqrt{3}\ ;\ 2-2{\cdot}i{\cdot}\sqrt{3}\ ;\ 2+2{\cdot}i{\cdot}\sqrt{3}\right\}$

Exercice 10 *(Polynésie - Juin 2014)*

On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 2{\cdot}n + 2 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Calculer u_1 et u_2.

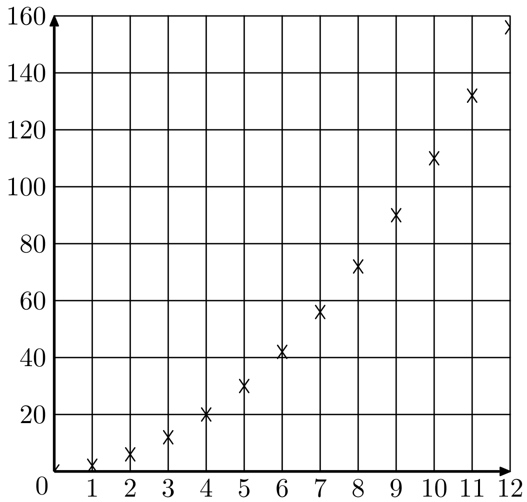
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1	Algorithme2
Variables :	**Variables**
n est un entier naturel	n est un entier naturel.
u est un réel	u est un réel.
Entrée :	**Entrée :**
Saisir la valeur de n	Saisir la valeur de n
Traitement :	**Traitement :**
u prend la valeur 0	u prend la valeur 0
Pour i allant de 1 à n :	Pour i allant de 0 à $n-1$:
u prend la valeur $u+2{\cdot}i+2$	u prend la valeur $u+2i+2$
Fin pour	Fin pour
Sortie :	**Sortie :**
Afficher u	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. A l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
Démontrer cette conjecture.

b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n : $\quad u_n = a{\cdot}n^2 + b{\cdot}n + c$.
Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par :
$v_n = u_{n+1} - u_n$

a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. On définit, pour tout entier naturel n :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$S_n = (n+1)(n+2)$

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$S_n = u_{n+1} - u_0$,
puis exprimer u_n en fonction de n.

Correction 10

1. Voici les valeurs des trois premiers termes de la suite :
   - $u_0 = 0$
   - $u_1 = u_0 + 2{\times}0 + 2 = 0 + 2 = 2$
   - $u_2 = u_1 + 2{\times}1 + 2 = 2 + 2 + 2 = 6$

2. L'algorithme 1 ne permet pas d'obtenir les termes de la suite (u_n) car lors de la première exécution de l'instruction dans la boucle, la variable u va prendre la valeur :
$u = 0 + 2{\times}1 + 2 = 2 + 2 = 4$

Ce qui ne correspond pas au terme de rang 1 de la suite (u_n).

3. a. On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante.
Pour établir cette conjecture, étudions la différence suivante :
$$u_{n+1} - u_n = \big(u_n + 2{\cdot}n + 2\big) - u_n = 2{\cdot}n + 2$$
n étant un entier naturel, on a :
$$2{\cdot}n + 2 \geqslant 0$$
$$u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$
$$u_{n+1} \geqslant 0$$
On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

b. En utilisant les trois premiers termes de la suite (u_n) :
$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_1=2 \\ u_2=6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a{\times}0^2 + b{\times}0 + c=0 \\ a{\times}1^2 + b{\times}1 + c=2 \\ a{\times}2^2 + b{\times}2 + c=6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a+b+c=2 \\ 4{\cdot}a + 2{\cdot}b + c=6 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a+b=2 \\ 4{\cdot}a + 2{\cdot}b=6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 4{\cdot}a + 4{\cdot}b=8 \\ 4{\cdot}a + 2{\cdot}b=6 \end{cases}$$
Par soustraction de la seconde ligne par la troisième, on obtient :
$$\big(4{\cdot}a + 4{\cdot}b\big) - \big(4{\cdot}a + 2{\cdot}b\big) = 8 - 6$$
$$2{\cdot}b = 2$$
$$b = 1$$
De la seconde équation, on en déduit la valeur de a :
$$a + b = 2$$
$$a + 1 = 2$$
$$a = 1$$
Ainsi, dans le cadre de cette conjecture, le terme de rang n s'écrit :
$u_n = n^2 + n$

4. a. On a :
$$v_n = u_{n+1} - u_n = \big(u_n + 2{\cdot}n + 2\big) - u_n = 2{\cdot}n + 2$$
Cette forme est celle d'une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 2.

b. La formule de la somme des termes d'une suite arithmétique permet d'écrire :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{\big(v_0 + v_n\big){\cdot}\big(n+1\big)}{2}$$
$$= \frac{\big[(2{\times}0 + 2) + (2{\times}n + 2)\big]{\cdot}\big(n+1\big)}{2}$$
$$= \frac{\big(2{\cdot}n + 4\big){\cdot}\big(n+1\big)}{2} = \frac{2{\cdot}\big(n+2\big){\cdot}\big(n+1\big)}{2} = \big(n+2\big)\big(n+1\big)$$

c. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :

$\mathcal{P}_n$: "$S_n = u_{n+1} - u_0$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
  On a :
  $S_0 = v_0$; $u_{0+1} - u_0 = u_1 - u_0 = v_0$
  La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse par récurrence :
  $S_n = u_{n+1} - u_0$
  Etudions l'expression :
  $$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} v_k = \Big(\sum_{k=0}^{n} v_k\Big) + v_{n+1}$$
  D'après l'hypothèse de récurrence :
  $$= \big(u_{n+1} - v_0\big) + v_{n+1}$$
  $$= u_{n+1} - u_0 + \big(u_{n+2} - u_{n+1}\big) = u_{n+2} - u_0$$
  On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :**
  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. Ainsi, on vient d'établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

De la propriété précédente, on a pour tout entier naturel n non-nul :
$$S_{n-1} = u_n - u_0$$
$$n{\cdot}(n+1) = u_n - 0$$
$$u_n = n{\cdot}(n+1)$$
Cette expression a été établie pour tout entier naturel n non-nul. Montrons qu'elle est également vraie pour $n{=}0$:
$u_0 = 0$; $0{\cdot}\big(0+1\big) = 0{\times}1 = 0$
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a :
$u_n = n{\cdot}\big(n+1\big)$

Exercice 11 *(Métropole - Septembre 2014)*

On administre à un patient un médicatment par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.
Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de $10\,m\ell$ de médicament. On estime que $20\,\%$ du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en $m\ell$, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi, $u_0=10$.

   a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

   b. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.

   c. Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à $1\,\%$ de la quantité initiale ? Justifier la réponse.

2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de $10\,m\ell$ de médicament. On estime que $20\,\%$ du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en dessous de $5\,m\ell$, la machine réinjecte $4\,m\ell$ de produit.

   Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.

   Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en $m\ell$, restant dans le sang à la minute n.

   L'algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute.

```
Variables :      n est un entier naturel
                 v est un nombre réel.
Initialisation : Affecter à v la valeur 10.
Traitement :     Pour n allant de 1 à 15
                     Affecter à v la valeur 0,8×v.
                     Si v<5 alors affecter à v la valeur v+4
                     Afficher v
                 Fin de boucle
```

   a. Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
v_n	10	8	6,4					8,15

n	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

   b. Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?

   c. On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte $2\,m\ell$ de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à $6\,m\ell$ et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.

   Recopier l'algorithme précédente en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en $m\ell$, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.

3. On programme la machine de façon que :
   - à l'instant 0, elle injecte $10\,m\ell$ de médicament,
   - toutes les minutes, elle injecte $1\,m\ell$ de médicament.

   On estime que $20\,\%$ du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.

   Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en $m\ell$, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

   a. Justifier que pour tout entier naturel n :
   $w_{n+1}=0{,}8\cdot w_n+1$.

   b. Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n=w_n-5$.
   Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   c. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

   d. Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?

Correction 11

1. a. La quantité de médicament baisse de $20\,\%$ par minutes. Or, une réduction de $20\,\%$ est associée à une coefficient multiplicateur de 0,8.
   On en déduit que la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme 10 et de raison 0,8.

   b. Les termes d'une suite géométrique s'expriment explicitement en fonction de leur rang n par la formule :
   $$u_n = u_0\cdot q^n = 10\times 0{,}8^n$$

   c. $1\,\%$ de $10\,m\ell$ représente $0{,}1\,\ell$. Considérons l'inéquation :
   $$u_n < 0{,}1$$
   $$10\times 0{,}8^n < 0{,}1$$
   $$0{,}8^n < \frac{0{,}1}{10}$$
   $$0{,}8^n < 0{,}01$$
   La fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:
   $$\ln\left(0{,}8^n\right) < \ln\left(0{,}01\right)$$
   $$n\cdot\ln\left(0{,}8\right) < \ln\left(0{,}01\right)$$
   De $0{,}8<1$, le nombre $\ln 0{,}8$ est négatif :
   $$n > \frac{\ln\left(0{,}01\right)}{\ln\left(0{,}8\right)} \simeq 20{,}6$$
   $$n \geqslant 21\,min$$
   Ainsi, c'est à partir de 21 minutes que la concentration du produit initial atteint $1\,\%$.

2. a. Voici le tableau complété :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
v_n	10	8	6,4	5,12	8,10	6,48	5,18	8,15

n	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

   b. Au bout de 15 minutes :
   - on a injecté les $10\,m\ell$ initiaux ;
   - et on a rajouté quatre fois la quantité supplémentaire de $4\,m\ell$.

   Ainsi, au bout de 15 minutes le patient a reçu $26\,m\ell$ de produit en injection.

   c. Voici l'algorithme recherché :

Variables : n est un entier naturel
v est un nombre réel.
Initialisation : Affecter à v la valeur 10.
Traitement : Pour n allant de 1 à 30
  Affecter à v la valeur $0{,}8\times v$.
  Si $v<6$ alors affecter à v la valeur $v+2$
  Afficher v
Fin de boucle

3. a. La quantité présente dans le sang diminue de 20 % par minute. Cette réduction est associée à un coefficient multiplicateur de 0,8.
Ainsi, de la quantité w_n qu'il avait à un instant, il ne lui en restera que $0{,}8{\cdot}w_n$ la minute suivante.
Or, rajoutant à chaque minute $1\,m\ell$, la nouvelle quantité w_{n+1} aura pour valeur :
$w_n = 0{,}8{\cdot}w_n + 1$

b. Etudions le quotient suivant :
$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{w_{n+1}-5}{w_n-5} = \frac{\big(0{,}8{\cdot}w_n+1\big)-5}{w_n-5} = \frac{0{,}8{\cdot}w_n-4}{w_n-5}$$
$$= \frac{0{,}8{\cdot}\Big(w_n-\dfrac{4}{0{,}8}\Big)}{w_n-5} = \frac{0{,}8{\cdot}\big(w_n-5\big)}{w_n-5} = 0{,}8$$
On en déduit que la suite $\big(z_n\big)$ est une suite géométrique de raison 0,8.
Le premier terme de la suite $\big(z_n\big)$ a pour valeur :
$z_0 = w_0 - 5 = 10 - 5 = 5$

c. La suite $\big(z_n\big)$ est une suite géométrique de premier terme 5 et de raison 0,8. On en déduit l'expression de la valeur du terme de rang n :
$z_n = 5\times 0{,}8^n$
D'après la définition des termes de la suite $\big(z_n\big)$:
$$z_n = w_n - 5$$
$$5\times 0{,}8^n = w_n - 5$$
$$w_n = 5\times 0{,}8^n + 5$$

d. De l'encadrement $0 \leqslant 0{,}8 < 1$, on en déduit :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 0{,}8^n = 0$
On en déduit la limite :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} w_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} 5\times 0{,}8^n + 5 = 5$
On peut donc en conclure qu'avec ce dispostif, le patient verra la quantité de médicament dans le sens se stabiliser vers une quantité de $5\,m\ell$.

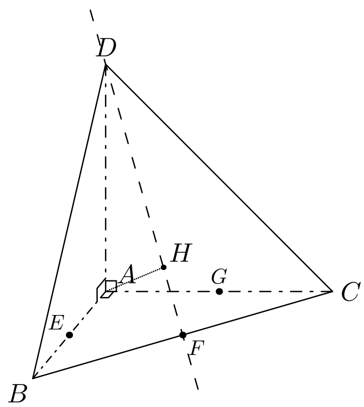
Exercice 12 *(Métropole - Juin 2014)*

Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AD}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (DF).
   a. Donner les coordonnées des points D et F.
   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).
   c. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
   d. Calculer les coordonnées du point H.
   e. Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.
2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM}=t\cdot\overrightarrow{DF}$.
On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.
Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.
   a. Démontrer que : $ME^2=\frac{3}{2}\cdot t^2-\frac{5}{2}\cdot t+\frac{5}{4}$
   b. Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
   En déduire que : $ME\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}$.
   c. Justifier que α est maximale si, et seulement si, $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
   En déduire que α est maximale si, et seulement si, ME^2 est minimal.
   d. Conclure.

Correction 12



1. a. Le point D a pour coordonnées : $D\left(0\,;0\,;1\right)$

On a les coordonnées des deux points suivants :
$B\left(1\,;0\,;0\right)$; $C\left(0\,;1\,;0\right)$
Le point F étant le milieu du segment $[BC]$, on en déduit :
$$F\left(\frac{x_B+x_C}{2}\,;\frac{y_B+y_C}{2}\,;\frac{z_B+z_C}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$$

b. Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur directeur de la droite (DF) et a pour coordonnées :
$$\overrightarrow{DF}(x_F-x_D\,;y_F-y_D\,;z_F-z_D)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-0\,;\frac{1}{2}-0\,;0-1\right)=\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;-1\right)$$
La droite (DF) admet pour représentation paramétrique :
$$(DF):\begin{cases} x=0+\frac{1}{2}\cdot t \\ y=0+\frac{1}{2}\cdot t \\ z=1-t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

c. Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. Ainsi, le plan $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme :
$\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot y-z+d=0$ où $d\in\mathbb{R}$
Le point A appartenant au plan $\mathcal{P}$, on en déduit que ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$:
$$\frac{1}{2}\cdot x_A+\frac{1}{2}\cdot y_A-z_A+d=0$$
$$\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 0-0+d=0$$
$$0+d=0$$
$$d=0$$
Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation :
$$\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot y-z=0$$

d. Considérons M un point d'intersection de la droite (DF) avec le plan $\mathcal{P}$.
- Le point M appartenant à la droite (DF), on en déduit l'existence d'un réel t tel que :
$M\left(\frac{1}{2}\cdot t\,;\frac{1}{2}\cdot t\,;1-t\right)$
- Le point M appartient au plan $\mathcal{P}$, ses coordonnées vérifient l'équation du plan :
$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot t\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot t\right)-(1-t)=0$$
$$\frac{1}{4}\cdot t+\frac{1}{4}\cdot t-1+t=0$$
$$\frac{3}{2}\cdot t-1=0$$
$$\frac{3}{2}\cdot t=1$$
$$t=\frac{2}{3}$$
Ainsi, le point M a pour coordonnées :
$$M\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\,;\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\,;1-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$$

e. On a les coordonnées des deux vecteurs :
- $\overrightarrow{HE}\,(x_E-x_H\,;y_E-y_H\,;z_E-z_H)$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\,;0-\frac{1}{3}\,;0-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{6}\,;-\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{3}\right)$$
- $\overrightarrow{HG}\,(x_G-x_H\,;y_G-y_H\,;z_G-z_H)$
$$=\left(0-\frac{1}{3}\,;\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\,;0-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}\,;\frac{1}{6}\,;-\frac{1}{3}\right)$$
On a le produit scalaire :

$$\overrightarrow{HE}\cdot\overrightarrow{HG}=\frac{1}{6}\cdot\Big(-\frac{1}{3}\Big)+\Big(-\frac{1}{3}\Big)\cdot\frac{1}{6}+\Big(-\frac{1}{3}\Big)\cdot\Big(-\frac{1}{3}\Big)$$
$$=-\frac{1}{18}-\frac{1}{18}+\frac{1}{9}=0$$

On en déduit que les vecteur $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont orthogonaux : l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.

2. a. Le point M appartenant à la droite (DF), on en déduit l'existence d'un réel t tel que :
$$M\Big(\frac{1}{2}\cdot t\,;\frac{1}{2}\cdot t\,;1-t\Big)$$
Ainsi, on a :
$$ME^2=\big(x_E-x_M\big)^2+\big(y_E-y_M\big)^2+\big(z_E-z_M\big)^2$$
$$=\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot t\Big)^2+\Big(0-\frac{1}{2}\cdot t\Big)^2+\big[0-(1-t)\big]^2$$
$$=\Big(\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\cdot t+\frac{1}{4}\cdot t^2\Big)+\frac{1}{4}\cdot t^2+1-2\cdot t+t^2$$
$$=\frac{3}{2}\cdot t^2-\frac{5}{2}\cdot t+\frac{5}{4}$$

b. Déterminons la valeur de MG^2 :
$$MG^2=\big(x_G-x_M\big)^2+\big(y_G-y_M\big)^2+\big(z_G-z_M\big)^2$$
$$=\Big(0-\frac{1}{2}\cdot t\Big)^2+\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot t\Big)^2+\big[0-(1-t)\big]^2$$
$$=\frac{1}{4}\cdot t^2+\Big(\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\cdot t+\frac{1}{4}\cdot t^2\Big)+1-2\cdot t+t^2$$
$$=\frac{3}{2}\cdot t^2-\frac{5}{2}\cdot t+\frac{5}{4}$$
Ainsi, pour tout réel t, on a l'égalité :
$$ME^2=MG^2$$
Les deux nombres ME et MG étant positif :
$$ME=MG$$
On en déduit que le triangle MGE est un triangle isocèle.

Notons I le milieu du segment $[EG]$ qui a pour coordonnées :
$$I\Big(\frac{x_E+x_G}{2}\,;\frac{y_E+y_G}{2}\,;\frac{z_E+z_G}{2}\Big)$$
$$=\left(\frac{\frac{1}{2}+0}{2}\,;\frac{0+\frac{1}{2}}{2}\,;\frac{0+0}{2}\right)=\Big(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\,;0\Big)$$
Le triangle MEG étant isocèle en M, on en déduit :

- (MI) est la hauteur issue de M dans le triangle MEG : le triangle MEI est rectangle en I.
- (MI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{EMI}$:
$$\widehat{EMI}=\frac{\alpha}{2}$$
- On a :
$$EI=\sqrt{\big(x_I-x_E\big)^2+\big(y_I-y_E\big)^2+\big(z_I-z_E\big)^2}$$
$$=\sqrt{\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\Big)^2+\Big(\frac{1}{4}-0\Big)^2+\big(0-0\big)^2}$$
$$=\sqrt{\Big(-\frac{1}{4}\Big)^2+\Big(\frac{1}{4}\Big)^2+0^2}=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}$$
$$=\sqrt{\frac{2}{16}}=\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}$$

Dans le triangle MEI rectangle en I, on a le rapport trigonométrique suivant :
$$\sin\widehat{EMI}=\frac{EI}{EM}$$
$$ME\cdot\sin\widehat{EMI}=EI$$
$$ME\cdot\sin\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}$$

c. α est la mesure d'un angle du triangle EMH : sa mesure appartient à l'intervalle $\big[0\,;\pi\big]$. On en déduit :
$$\frac{\alpha}{2}\in\Big[0\,;\frac{\pi}{2}\Big]$$
Or, la fonction sin est strictement croissante sur $\Big[0\,;\frac{\pi}{2}\Big]$.

On en déduit l'assertion : α est maximale, si et seulement si, $\sin\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)$ est maximal.

Démontrons la seconde équivalence :

- Notons α_0 la valeur maximale de α et respectivement M_0 et M la position du point associée à chacun de ces angles :
$$\alpha\leqslant\alpha_0$$
$$\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{\alpha_0}{2}$$
La fonction sinus est croissante sur $\Big[0\,;\frac{\pi}{2}\Big]$:
$$0<\sin\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\leqslant\sin\Big(\frac{\alpha_0}{2}\Big)$$
La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\frac{1}{\sin\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)}\geqslant\frac{1}{\sin\Big(\frac{\alpha_0}{2}\Big)}$$
$$\frac{1}{\sin\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)}\times\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}\geqslant\frac{1}{\sin\Big(\frac{\alpha_0}{2}\Big)}\times\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}$$
$$ME\geqslant M_0E$$
La fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}$:
$$ME^2\geqslant M_0E^2$$
On en déduit que la distance M_0E^2 est alors minimale.
- La réciproque est immédiate.

d. Or, le polynôme $\frac{3}{2}\cdot t^2-\frac{5}{2}\cdot t+\frac{5}{4}$ est du second degré et son coefficient du second degré positif. Il admet un minimum atteint pour la valeur de t_0 :
$$t_0=-\frac{b}{2\cdot a}=-\frac{-\frac{5}{2}}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{\frac{5}{2}}{3}=\frac{5}{6}$$
Ainsi, la mesure α de l'angle $\widehat{EMG}$ est maximale pour le point M_0 définie par :
$$M_0\Big(\frac{1}{2}\cdot t_0\,;\frac{1}{2}\cdot t_0\,;1-t_0\Big)=\Big(\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}\,;\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}\,;1-\frac{5}{6}\Big)$$
$$=\Big(\frac{5}{12}\,;\frac{5}{12}\,;\frac{1}{6}\Big)$$

Exercice 13 *(Métropole - Septembre 2014)*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$, on considère le tétraèdre $ABCD$ dont les sommets ont pour coordonnées :

$A\left(1\,;-\sqrt{3}\,;0\right)$; $B\left(1\,;\sqrt{3}\,;0\right)$; $C\left(-2\,;0\,;0\right)$; $D\left(0\,;0\,;2\sqrt{2}\right)$

1. Démontrer que le plan (ABD) a pour équation cartésienne $4x+z\sqrt{2}=4$

2. On note $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$
   a. Démontrer que $\mathcal{D}$ est la droite qui est parallèle à (CD) et passe par O.
   b. Déterminer les coordonnées du point G, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABD).

3. a. On note L le milieu du segment $[AC]$.
   Démontrer que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC).
   b. Prouver que le triangle ABC est équilatéral et déterminer le centre de son centre circonscrit.

4. Démontrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont les six arêtes ont la même longueur.

Correction 13

1. On a les coordonnées suivantes des vecteurs :
   - $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A\,;y_B-y_A\,;z_B-z_A\right)$
   $= \left(1-1\,;\sqrt{3}-(-\sqrt{3})\,;0-0\right) = \left(0\,;2\sqrt{3}\,;0\right)$
   - $\overrightarrow{DA}\left(x_A-x_D\,;y_A-y_D\,;z_A-z_D\right)$
   $= \left(1-0\,;-\sqrt{3}-0\,;0-2\sqrt{2}\right) = \left(1\,;-\sqrt{3}\,;-2\sqrt{2}\right)$

   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : les points A, B et D ne sont pas colinéaires.
   On en déduit que les trois points A, B et D ne sont pas alignés.

   Vérifions que ces trois points vérifient l'équation du plan proposée :
   - $4{\cdot}x_A+z_A{\cdot}\sqrt{2} = 4\times1+0\times\sqrt{2}=4$
   Les coordonnées du point A vérifient cette équation.
   - $4{\cdot}x_B+z_B{\cdot}\sqrt{2} = 4\times1+0\times\sqrt{2}=4$
   Les coordonnées du point B vérifient cette équation.
   - $4{\cdot}x_D+z_D{\cdot}\sqrt{2} = 4\times0+2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4$
   Les coordonnées du point D vérifient cette équation.

   Ainsi, le plan (ABD) a pour équation cartésienne :
   $4{\cdot}x+z{\cdot}\sqrt{2}=4$

2. a. D'après sa représentation paramétrique, la droite $\mathcal{D}$ admet pour vecteur directeur :
   $\overrightarrow{u}\left(1\,;0\,;\sqrt{2}\right)$
   Or, le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées :
   $\overrightarrow{CD} = \left(x_D-x_C\,;y_D-y_C\,;z_D-z_C\right)$
   $= \left(0-(-2)\,;0-0\,;2\sqrt{2}-0\right) = \left(2\,;0\,;2\sqrt{2}\right)$
   On obtient la relation $\overrightarrow{CD}=2{\cdot}\overrightarrow{u}$: on en déduit que les vecteur $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.
   La droite $\mathcal{D}$ est parallèle à la droite (CD).
   Le point définie par la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ et pour $t=0$ a pour coordonnées :
   $M\left(0\,;0\,;0\times\sqrt{2}\right) = \left(0\,;0\,;0\right)$.
   La droite $\mathcal{D}$ passe par le point O.

   b. Le point G appartenant à la droite $\mathcal{D}$, il existe un réel t tel que le point G ait pour coordonnées :
   $G\left(t\,;0\,;t{\cdot}\sqrt{2}\right)$
   Le point G appartient au plan $\mathcal{D}$; ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan (ABC) :
   $$\begin{aligned} 4{\cdot}x_G+z_G{\cdot}\sqrt{2} &= 4 \\ 4{\cdot}t+\left(t{\cdot}\sqrt{2}\right){\cdot}\sqrt{2} &= 4 \\ 4{\cdot}t+2t &= 4 \\ 6{\cdot}t &= 4 \\ t = \frac{4}{6} &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$
   Ainsi, le point G a pour coordonnées :
   $G\left(\frac{4}{6}\,;0\,;\frac{2}{3}\times\sqrt{2}\right) = \left(\frac{4}{6}\,;0\,;\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

3. a. Le point L étant le milieu du segment $[AC]$, il a pour coordonnées :
   $$L\left(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\frac{y_A+y_C}{2}\,;\frac{z_A+z_C}{2}\right)$$
   $$= \left(\frac{1+(-2)}{2}\,;\frac{-\sqrt{3}+0}{2}\,;\frac{0+0}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;0\right)$$
   On a les coordonnées des deux vecteurs :
   - $\overrightarrow{BL} = \left(x_L-x_B\,;y_L-y_B\,;z_L-z_B\right)$
   $= \left(-\frac{1}{2}-1\,;-\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\,;0-0\right)$
   $= \left(-\frac{3}{2}\,;-\frac{3\sqrt{3}}{2}\,;0\right)$
   - $\overrightarrow{BO}\left(x_B-x_O\,;y_B-y_O\,;z_B-z_O\right)$
   $= \left(1-0\,;\sqrt{3}-0\,;0-0\right) = \left(1\,;\sqrt{3}\,;0\right)$

   On obtient la relation : $\overrightarrow{BL}=-\frac{3}{2}{\cdot}\overrightarrow{BO}$
   Les vecteurs $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{BO}$ sont colinéaires : on en déduit que les points B, O et L sont alignés.
   Le point O appartient à la droite (BL).
   Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées :
   $\overrightarrow{AC} = \left(x_C-x_A\,;y_C-y_A\,;z_C-z_A\right)$
   $= \left(-2-1\,;0-(-\sqrt{3})\,;0-0\right) = \left(-3\,;\sqrt{3}\,;0\right)$
   Considérons le produit scalaire suivant :
   $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BL} = -3\times\left(-\frac{3}{2}\right)+\sqrt{3}{\cdot}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)+0\times0$
   $= \frac{9}{2}-\frac{9}{2}=0$
   On en déduit que les droites (AC) et (BL) sont orthogonales.

b. Déterminons les trois longueurs du triangle ABC :

- $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}$
$= \sqrt{\left(1-1\right)^2 + \left(\sqrt{3} - (-\sqrt{3})\right)^2 + \left(0-0\right)^2}$
$= \sqrt{0^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

- $AC = \sqrt{\left(x_C - x_A\right)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2 + \left(z_C - z_A\right)^2}$
$= \sqrt{\left(-2-1\right)^2 + \left(0 - (-\sqrt{3})\right)^2 + \left(0-0\right)^2}$
$= \sqrt{(-3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

- $CB = \sqrt{\left(x_B - x_C\right)^2 + \left(y_B - y_C\right)^2 + \left(z_B - z_C\right)^2}$
$= \sqrt{\left(1-(-2)\right)^2 + \left(\sqrt{3} - 0\right)^2 + \left(0-0\right)^2}$
$= \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Les trois côtés du triangle ABC ont même mesure : le triangle ABC est un triangle équilatéral.

4. Déterminons la mesure des trois autres arêtes :

- $AD = \sqrt{\left(x_D - x_A\right)^2 + \left(y_D - y_A\right)^2 + \left(z_D - z_A\right)^2}$
$= \sqrt{\left(0-1\right)^2 + \left(0 - (-\sqrt{3})\right)^2 + \left(2\sqrt{2} - 0\right)^2}$
$= \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1+3+8} = \sqrt{12}$
$= 2\sqrt{3}$

- $DB = \sqrt{\left(x_B - x_D\right)^2 + \left(y_B - y_D\right)^2 + \left(z_B - z_D\right)^2}$
$= \sqrt{\left(1-0\right)^2 + \left(\sqrt{3} - 0\right)^2 + \left(0 - 2\sqrt{2}\right)^2}$
$= \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1+3+8} = \sqrt{12}$
$= 2\sqrt{3}$

- $DC = \sqrt{\left(x_C - x_D\right)^2 + \left(y_C - y_D\right)^2 + \left(z_C - z_D\right)^2}$
$= \sqrt{\left(-2-0\right)^2 + \left(0-0\right)^2 + \left(0 - 2\sqrt{2}\right)^2}$
$= \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{12}$
$= 2\sqrt{3}$

Les six arêtes du tétraèdres sont de même mesure : le tétraèdre est régulier.

