Correction 1 *(Polynésie - Juin 2014)*

1. Par les fonctions f et g, on a les images suivantes :

$$f(0) = e^0 = 1 \quad ; \quad g(0) = 2 \cdot e^{\frac{0}{2}} - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1$$

Le point de coordonnées $(0\,;1)$ est un point commun des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Déterminons que les tangentes au point d'abscisses 0 aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont même coefficient directeur :

- La fonction f admet pour dérivée f' dont l'expression est :
  $f'(x) = e^x$.
  Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour valeur :
  $f'(0) = e^0 = 1$
- L'expression de la fonction g est donnée sous la forme :
  $g(x) = 2 \cdot e^{\frac{x}{2}} - 1$
  où la fonction u est définie par :
  $u(x) = \dfrac{x}{2} \quad ; \quad u'(x) = \dfrac{1}{2}$
  La formule de dérivation de la composée par la fonction exponentielle permet d'obtenir l'expression de la fonction g :
  $g'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} - 0 = e^{\frac{1}{2}}$
  Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ a pour valeur :
  $g'(0) = e^{\frac{0}{2}} = 1$

Ces deux tangentes passe par le même point de coordonnées $(0\,;1)$ et ont sont donc confondues.
Elles ont pour équation réduite :

$$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$$
$$y = 1 \cdot x + 1$$
$$y = x + 1$$

2. a. On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \mapsto -\infty} 2 \cdot e^{\frac{x}{2}} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \mapsto -\infty} -x - 2 = +\infty$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x \mapsto -\infty} h(x) = \lim_{x \mapsto -\infty} 2 \cdot e^{\frac{x}{2}} - x - 2 = +\infty$$

b. On a les transformations algébriques suivante :

$$h(x) = 2 \cdot e^{\frac{x}{2}} - x - 2 = x \cdot \left(\frac{2 \cdot e^{\frac{x}{2}}}{x} - 1 - \frac{2}{x} \right)$$
$$= x \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x} - 1 - \frac{2}{x} \right) = x \cdot \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x} \right)$$

On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} x = +\infty \;;\; \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = +\infty \;;\; \lim_{x \mapsto +\infty} -1 - \frac{2}{x} = -1$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} h(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} x \cdot \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x} \right) = +\infty$$

c. En remarquant l'égalité : $h(x) = g(x) - x - 1$
On obtient l'expression de la fonction h' :
$h'(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1$
Déterminons le signe de la fonction h' sur $\mathbb{R}$:

$$h'(x) \geqslant 0$$
$$e^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant 0$$
$$e^{\frac{x}{2}} \geqslant 1$$
$$e^{\frac{x}{2}} \geqslant 1 > 0$$

La fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\ln\left(e^{\frac{x}{2}}\right) \geqslant \ln 1$$
$$\frac{x}{2} \geqslant 0$$
$$x \geqslant 0$$

Ainsi, la fonction h' admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

d. L'image du nombre 0 par la fonction h a pour valeur :

$$h(0) = 2 \cdot e^{\frac{0}{2}} - 0 - 2 = 2 \times 1 - 0 - 2 = 2 - 2 = 0$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de h	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

e. D'après le tableau de variation de la fonction précédente, la fonction h admet pour minimum la valeur 0 pour $x = 0$. On en déduit que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$:

$$h(x) \geqslant 0$$
$$2 \cdot e^{\frac{x}{2}} - x - 2 \geqslant 0$$
$$2 \cdot e^{\frac{x}{2}} \geqslant x + 2$$
$$2 \cdot e^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$$
$$2 \cdot e^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1 \geqslant x - 1$$
$$2 \cdot e^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x - 1$$

f. Pour étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et Δ, déterminons le signe de la différente :

$$\left(2 \cdot e^{\frac{x}{2}} - 1\right) - (x - 1)$$

Or, d'après la question précédente, on a la comparaison :

$$2 \cdot e^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x - 1$$
$$\left(2 \cdot e^{\frac{x}{2}} - 1\right) - (x - 1) \geqslant 0$$

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_g$ se situe au dessus de la droite Δ.

3. a. On a le développement :

$$\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 2 \times e^{\frac{x}{2}} \times 1 + 1^2$$
$$= e^{2 \times \frac{x}{2}} - 2 \cdot e^{\frac{x}{2}} + 1 = e^x - 2 \cdot e^{\frac{x}{2}} + 1$$

b. Pour étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, étudions le signe de la différence suivante :

$$f(x)-g(x)=e^x-\left(2\cdot e^{\frac{x}{2}}-1\right)=e^x-2\cdot e^{\frac{x}{2}}+1$$

D'après la question précédente :

$$=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2\geqslant 0$$

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ se situe toujours sur $\mathbb{R}$ au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.

4. D'après la question précédente, la différence $f(x)-g(x)$ est positive sur $[0\,;1]$. Ainsi, l'intégrale ci-dessous représente l'aire comprise entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$:

$$\int_0^1 f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 e^x-\left(2\cdot e^{\frac{x}{2}}-1\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left[e^x-2\times 2\cdot e^{\frac{x}{2}}+x\right]_0^1=\left[e^x-4\cdot e^{\frac{x}{2}}+x\right]_0^1$$

$$=\left(e^1-4\cdot e^{\frac{1}{2}}+1\right)-\left(e^0-4\cdot e^{\frac{0}{2}}+0\right)$$

$$=e^1-4\cdot e^{\frac{1}{2}}+1-1+4=e-4\cdot e^{\frac{1}{2}}+4$$

Correction 2 *(Métropole - Juin 2014)*

Partie A

1. La fonction f_1 admet l'image suivante :

$f_1(0)=0+e^{-0}=0+1=1$

On en déduit que le point de coordonnées $(0\,;1)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Etudions les deux limites suivantes :

- Considérons la transformation algébrique suivante :

$$f_1(x)=x+e^{-x}=-x\cdot\left(-1+\frac{e^{-x}}{-x}\right)$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}-x=+\infty\quad;\quad\lim_{x\mapsto-\infty}-1+\frac{e^{-x}}{-x}=+\infty$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}f_1(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}-x\cdot\left(-1+\frac{e^{-x}}{-x}\right)=+\infty$$

- On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}x=+\infty\quad;\quad\lim_{x\mapsto+\infty}e^{-x}=0$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}f_1(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}x+e^{-x}=+\infty$$

L'expression de la fonction f_1 est donnée sous la forme :

$f(x)=x+e^{u(x)}$

où la fonction u est définie par :

$u(x)=-x\quad;\quad u'(x)=-1.$

La formule de dérivation de la composée par la fonction exponentielle permet d'obtenir l'expression de la fonction f_1 :

$f_1'(x)=1+u'(x)\cdot e^{u(x)}=1+(-1)\cdot e^{-x}=1-e^{-x}$

Etudions le signe de la fonction f_1' :

$$f_1'(x)\geqslant 0$$
$$1-e^{-x}\geqslant 0$$
$$-e^{-x}\geqslant -1$$
$$e^{-x}\leqslant 1$$

La fonction logarithme est strictement continue sur $\mathbb{R}_+$:

$$\ln\left(e^{-x}\right)\leqslant\ln 1$$
$$\ln\left(e^{-x}\right)\leqslant\ln 1$$
$$-x\leqslant 0$$
$$x\geqslant 0$$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1. a. Sur l'intervalle $[0\,;1]$, la fonction f_n est positive, on en déduit que l'intégrale I_n représente l'aire definie entre la courbe $\mathscr{C}_{f_n}$ et l'axe des abscisses et comprise entre les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

b. Il semble qu'au fur et à mesure que la valeur de n augmente, la courbe $\mathscr{C}_{f_n}$ se rapproche de l'axe des abscisses : l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses diminue.

On peut conjecturer que la suite (I_n) de nombres réels est décroissante.

2. Etudions la différence :

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\left(x+e^{-(n+1)\cdot x}\right)\mathrm{d}x-\int_0^1\left(x+e^{-n\cdot x}\right)\mathrm{d}x$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$=\int_0^1\left(x+e^{-(n+1)\cdot x}\right)-\left(x+e^{-n\cdot x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 e^{-(n+1)\cdot x}-e^{-n\cdot x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 e^{-(n+1)\cdot x}\cdot\left(1-\frac{e^{-n\cdot x}}{e^{-(n+1)\cdot x}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 e^{-(n+1)\cdot x}\cdot\left(1-e^{-n\cdot x+(n+1)\cdot x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 e^{-(n+1)\cdot x}\cdot\left(1-e^x\right)\mathrm{d}x$$

Sur l'intervalle $[0\,;1]$, on a la comparaison :

$$e^x\geqslant 1$$
$$-e^x\leqslant -1$$
$$1-e^x\leqslant 0$$

La fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$:

$$e^x\cdot\left(1-e^x\right)\leqslant e^x\times 0$$
$$e^x\cdot\left(1-e^x\right)\leqslant 0$$

Par la propriété de positivité de l'intégrale :

$$\int_0^1 e^x\cdot\left(1-e^x\right)\leqslant 0$$
$$I_{n+1}-I_n\leqslant 0$$
$$I_{n+1}\leqslant I_n$$

On en déduit que la suite (I_n) est décroissante.

De plus, (I_n) est une suite de nombres réels positifs : la suite (I_n) est minorée par la valeur 0.

D'après les théorèmes de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite (I_n) est convergente.

3. Effectuons le calcul de l'intégrale I_n :

$$I_n = \int_0^1 x + e^{-n\cdot x}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{2}\cdot x^2 + \Big(-\frac{1}{n}\Big)\cdot e^{-n\cdot x}\Big]_0^1$$
$$= \Big[\frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{n}\cdot e^{-n\cdot x}\Big]_0^1$$
$$= \Big(\frac{1}{2}\times 1^2 - \frac{1}{n}\cdot e^{-n\times 1}\Big) - \Big(\frac{1}{2}\times 0^2 - \frac{1}{n}\cdot e^{-n\times 0}\Big)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\cdot e^{-n} + \frac{1}{n}\cdot e^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\cdot e^{-n} + \frac{1}{n}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{n}\cdot e^{-n} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} I_n = \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\cdot e^{-n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

Correction 3 *(Pondichéry- Avril 2014)*

Partie A

1. C'est la situation 1 qui représente la courbe $\mathscr{C}_2$ car :
   - Dans la situation 2, la courbe $\mathscr{C}_2$ est la représentation d'une fonction affine : sa primitive sera la fonction carré. Or, la courbe $\mathscr{C}_1$ n'est pas la représentation de la fonction carré.
   - Dans la situation 3, la courbe $\mathscr{C}_1$ étant décroissante sur $\big]-\infty\,;\alpha\big[$, où $\alpha\simeq-0.5$, la dérivée de la fonction f doit être négative. Or, f' représenté par la courbe $\mathscr{C}_2$ proposée dans la situation 3 est positive sur cet intervalle.

2. D'après les données de l'énoncé :
   - Le point $A(0\,;2)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_1$. On en déduit :
     $f(0) = 2.$
   - Le point $B(0\,;1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_2$. On en déduit :
     $f'(0) = 1$

   Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_1$ admet pour tangente au point A qui a pour abscisse 0 :

   $$y = f'(0)\cdot\big(x-0\big) + f(0)$$
   $$y = 1\cdot\big(x-0\big) + 2$$
   $$y = x + 2$$

3. a. On a vue que l'image de 0 par la fonction f vaut 2. Ainsi, les nombres a et b doivent vérifier l'équation suivante :

   $$f(0) = e^{-0} + a\times 0 + b$$
   $$2 = 1 + b$$
   $$b = 2 - 1$$
   $$b = 1$$

   b. Ainsi, l'expression de la fonction f est :
   $f(x) = e^{-x} + a\cdot x + 1$ où $a\in\mathbb{R}$ Ainsi, la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
   $f'(x) = -e^{-x} + a$
   Or, on a vu que $f'(0)=1$. Ainsi, le nombre a doit vérifier l'équation :

   $$f'(0) = -e^{-0} + a$$
   $$1 = -1 + a$$
   $$a = 1 + 1$$
   $$a = 2$$

4. D'après les question précédente, on a :
   - $f(x) = e^{-x} + 2x + 1$
   - $f'(x) = -e^{-x} + 2$

   Résolvons l'inéquation :

   $$f'(x) \geqslant 0$$
   $$-\,e^{-x} + 2 \geqslant 0$$
   $$-\,e^{-x} \geqslant -2$$
   $$e^{-x} \leqslant 2$$
   $$0 < e^{-x} \leqslant 2$$

   La fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

   $$\ln\big(e^{-x}\big) \leqslant \ln 2$$
   $$-\,x \leqslant \ln 2$$
   $$x \geqslant -\ln 2$$

   Ainsi, la fonction f' admet pour tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

   On en déduit :
   - La fonction f est décroissante sur $\big]-\infty\,;-\ln 2\big[$;
   - La fonction f est croissante sur $\big]-\ln 2\,;+\infty\big[$;

5. On a les limites suivantes :

   $$\lim_{x\mapsto+\infty} e^{-x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} 2x+1 = +\infty$$

   Ainsi, on en déduit la limite :

   $$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} e^{-x} + 2x + 1 = +\infty$$

Partie B

1. a. On a la transformation algébrique suivante :

   $$g(x) = f(x) - \big(x+2\big) = \big(e^{-x} + 2x + 1\big) - \big(x+2\big)$$
   $$= e^{-x} + 2x + 1 - x - 2 = e^{-x} + x - 1$$

   La fonction g admet pour dérivée la fonction g' dont l'expression est :
   $g'(x) = -e^{-x} + 1$
   Résolvons l'inéquation suivante :

   $$g'(x) \geqslant 0$$
   $$-\,e^{-x} + 1 \geqslant 0$$
   $$-\,e^{-x} \geqslant -1$$
   $$0 < e^{-x} \leqslant 1$$

   La fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

   $$\ln\big(-e^{-x}\big) \leqslant \ln 1$$
   $$-\,x \leqslant 0$$
   $$x \geqslant 0$$

   On a le tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

   L'image de 0 par la fonction g a pour valeur :
   $g(0) = f(0) - (0+2) = 2 - 2 = 0$
   Ainsi, la fonction g admet le tableau de variation :

x	-∞		0		$+\infty$
Variation de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit que la fonction g admet 0 pour minimum.

b. La fonction g admettant la valeur 0 pour minimum, on en déduit la comparaison suivante pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$g(x) \geqslant 0$$
$$f(x)-(x+2) \geqslant 0$$
$$f(x) \geqslant x+2$$

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_1$ est toujours au dessus de la droite (Δ).

2. Le domaine considéré étant situé entre la courbe $\mathscr{C}_1$ et la droite Δ, on en déduit que son aire est définie par l'int̂egrale :

$$\int_{-2}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} f(x)-(x+2)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-2}^{2} e^{-x}+2x+1-x-2\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} e^{-x}+x-1\,\mathrm{d}x$$
$$= \Big[-e^{-x}+\frac{1}{2}\cdot x^2-x\Big]_{-2}^{2} = -e^{-2}+2-2+e^2-2-2$$
$$= e^2-e^{-2}-4 \simeq 3{,}25$$

Correction 4 *(Amérique du Sud - Novembre 2014)*

Partie A

1. a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :

$$u(x)=x+\frac{1}{4} \quad ; \quad v(x)=e^{-4x}$$

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x)=1 \quad ; \quad v'(x)=-4\cdot e^{-4x}$$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)+0$$
$$= 1\cdot e^{-4x}+\Big(x+\frac{1}{4}\Big)\cdot\big(-4\cdot e^{-4x}\big)$$
$$= e^{-4x}-4\cdot\Big(x+\frac{1}{4}\Big)\cdot e^{-4x} = e^{-4x}\cdot(1-4\cdot x-1)$$
$$= -4x\cdot e^{-4x}$$

b. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$-4x$	$+$	0	$-$	$-$
e^{-4x}	$+$		$+$	$+$
$f'(x)$		0	$-$	

On en déduit que la fonction f' est négative sur $[0\,;2]$.

La fonction f est décroissante sur $[0\,;2]$.

2. La fonction f étant décroissante sur $[0\,;2]$, on en déduit qu'elle atteint son maximum en 0.

Ainsi, cherchons la condition pour qu'elle vérifie :

$$f(0)=1{,}5$$
$$\Big(0+\frac{1}{4}\Big)\cdot e^{-4\times0}+b=\frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{4}\times1+b=\frac{3}{2}$$
$$b=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}$$
$$b=\frac{5}{4}$$

Partie B

1. L'expression de la fonction F est donnée sous la forme :

$$F(x)=u(x)\cdot v(x)+\frac{5}{4}\cdot x$$

où les fonctions u et v définies par :

$$u(x)=-\frac{x}{4}-\frac{1}{8} \quad ; \quad v(x)=e^{-4x}$$

qui admettent pour dérivées :

$$u'(x)=-\frac{1}{4} \quad ; \quad v'(x)=-4\cdot e^{-4x}$$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction F' :

$$F'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)+\frac{5}{4}$$
$$= -\frac{1}{4}\cdot e^{-4x}+\Big(-\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\Big)\cdot\big(-4\cdot e^{-4x}\big)+\frac{5}{4}$$
$$= -\frac{1}{4}\cdot e^{-4x}+\Big(x+\frac{1}{2}\Big)\cdot e^{-4x}+\frac{5}{4}$$
$$= e^{-4x}\cdot\Big[-\frac{1}{4}+\Big(x+\frac{1}{2}\Big)\Big]+\frac{5}{4}$$
$$= e^{-4x}\cdot\Big(x+\frac{1}{4}\Big)+\frac{5}{4}=f(x)$$

On vient de monter que la dérivée de la fonction F est la fonction f : ainsi, la fonction F est une primitive de la fonction f.

2. Chaque vantail mesure 2 mètres de large et pour chaque $x\in[0\,;2]$, l'expression $f(x)-0{,}05$ est positive et définie la hauteur du vantail au point d'abscisse x.

Ainsi, l'aire de chaque vantail est donnée par l'intégrale :

$$\int_0^2 f(x)-0{,}05\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)-0{,}05\cdot x\Big]_0^2$$
$$= \Big[\Big(-\frac{2}{4}-\frac{1}{8}\Big)\cdot e^{-4\times2}+\frac{5}{4}\times2-0{,}05\times2\Big]$$
$$-\Big[\Big(-\frac{0}{4}-\frac{1}{8}\Big)\cdot e^{-4\times0}+\frac{5}{4}\times0-0{,}05\times0\Big]$$
$$= \Big(-\frac{5}{8}\cdot e^{-8}+\frac{5}{2}-0{,}1\Big)-\Big(-\frac{1}{8}\Big) = -\frac{5}{8}\cdot e^{-8}+\frac{20-0{,}8+1}{8}$$
$$= -\frac{5}{8}\cdot e^{-8}+\frac{20{,}2}{8} = -\frac{5}{8}\cdot e^{-8}+\frac{101}{40}$$

On a la valeur approchée :

$$\int_0^2 f(x)-0{,}05 \simeq 2{,}52\,m^2$$

Partie C

1. L'abscisse du bord gauche de la planche 0 est 0.

Pour placer la planche k, donc la $(k+1)^e$, on a laissé sur la gauche k planches mesurant $0{,}12\,m$ avec k espace mesurant $0{,}05\,m$.

Ainsi, l'abscisse du bord gauche de la planche k est $0{,}17\times k$.

Ainsi, de manière générale, la planche k atteint une hauteur en partant du sol dont la valeur est $f\big(0{,}17\cdot k\big)$.

L'aire de cette planche est : $0{,}12\times\big[f(0{,}17\cdot k)-0{,}05\big]$

$0{,}12\times f(0{,}17\cdot k)-0{,}006$

2. Voici l'algorithme complété :

Variables :	Les nombres X et S sont des nombres réels
Initialisation :	On affecte à S la valeur 0
	On affecte à X la valeur 0
Traitement :	**Tant que** $X+0{,}17<2$
	S prend la valeur $S+0{,}12\times f(X)-0{,}006$
	X prend la valeur $X+0{,}17$
	Fin de Tant Que
Affichage	On affiche S.

Correction 5 *(Centres étrangers - Juin 2014)*

Partie A

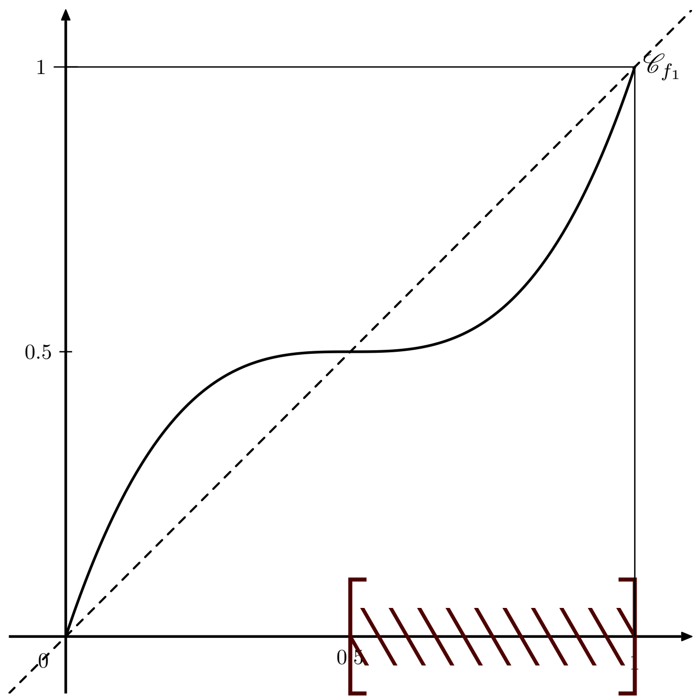
1. a. Pour montrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche, montrons qu'elle vérifie les quatre points d'une fonction de retouche :
- $f_1(0)=4\times 0^3-6\times 0^2+3\times 0=0$
- $f_1(1)=4\times 1^3-6\times 1^3+3\times 1=4-6+3=1$
- La fonction f_1 est un polynôme qui est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction f_1 admet pour dérivée :
  $f_1'(x)=4\times 3x^2-6\times 2x+3=12{\cdot}x^2-12{\cdot}x+3$
  Le polynôme $12{\cdot}x^2-12x+3$ admet pour discriminant :
  $\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=(-12)^2-4\times 12\times 3$
  $=144-144=0$
  On a la valeur particulière : $-\dfrac{b}{2{\cdot}a}=-\dfrac{-12}{2\times 12}=\dfrac{1}{2}$
  Le discriminant étant nul, on en déduit que ce polynôme a le même signe suivant sur $\big[0\,;1\big]$:

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$+$	

  On en déduit que la fonction f_1 est croissante sur $\big[0\,;1\big]$.

Ainsi, la fonction f_1 est une fonction de retouche.

b. On trace la droite d'équation $y=x$:



Graphiquement l'inéquation $f_1(x)\leqslant x$ a pour solution l'intervalle $\big[0{,}5\,;1\big]$. Ainsi, sur cet intervalle, la valeur donnée par la retouche est inférieure à la valeur initiale, or la valeur la plus claire est la plus petite.

Ainsi :
- Pour des pixels dont la nuance est comprise entre $\big[0\,;0{,}5\big]$ la fonction f_1 de retouche assombrie la nuance ;
- Pour des pixels dont la nuance est comprise entre $\big[0{,}5\,;1\big]$ la fonction f_1 de retouche éclaircie la nuance.

2. a. L'expression de la fonction g est donnée sous la forme :
$g(x)=f_2(x)-x=\ln\big[u(x)\big]-x$
où la fonction u est définie par :
$u(x)=1+(e-1){\cdot}x \quad ; \quad u'(x)=e-1$
La formule de dérivation de la composée d'une fonction par la fonction logarithme permet d'obtenir l'expression de la fonction g' :

$$g'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}-1=\frac{e-1}{1+(e-1){\cdot}x}-1$$
$$=\frac{e-1-1{\cdot}\big[1+(e-1){\cdot}x\big]}{1+(e-1){\cdot}x}$$
$$=\frac{e-1-1-(e-1){\cdot}x}{1+(e-1){\cdot}x}=\frac{(e-2)-(e-1){\cdot}x}{1+(e-1){\cdot}x}$$

De la valeur approchée $e-1\simeq 1{,}72$, on en déduit que le signe de g' ne dépend que de son numérateur. Etudions le signe du numérateur :
$(e-2)-(e-1){\cdot}x\geqslant 0$
$-(e-1){\cdot}x\geqslant -(e-2)$
Le nombre $-(e-1)$ étant négatif :
$$x\leqslant\frac{-(e-2)}{-(e-1)}$$
$$x\leqslant\frac{e-2}{e-1}$$
On a la valeur approchée : $\dfrac{e-2}{e-1}\simeq 0{,}418$
On en déduit le tableau de signe suivant :

x	0		$\frac{e-2}{e-1}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

On a les images suivantes par la fonction g :
- $g(0)=f_2(0)-0=0-0=0$
- $g(1)=f_2(1)-1=1-1=0$

Ainsi, la fonction g admet le tableau de variation ci-dessous :

x	0	$\frac{e-2}{e-1}$	1
Variation de g	0 ↗	$0{,}12$	↘ 0

D'après le tableau de variation, la fonction g admet un maximum atteint en $\dfrac{e-2}{e-1}$

b. Effectuons deux raisonnements similaires :
- Sur l'intervalle $\Big[0\,;\dfrac{e-2}{e-1}\Big]$:
  On a les deux images des bornes de l'intervalle :
  $f(0)=0 \quad ; \quad f\Big(\dfrac{e-2}{e-1}\Big)\simeq 0{,}12$
  De plus :

- La fonction g est continue sur $\left[0\,;\frac{e-2}{e-1}\right]$
- La fonction g est strictement croissante sur $\left[0\,;\frac{e-2}{e-1}\right]$
- le nombre 0,05 est compris entre les images par la fonction g aux bornes de l'intervalle $\left[0\,;\frac{e-2}{e-1}\right]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution α sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{e-2}{e-1}\right]$ tel que :
$g(\alpha)=0{,}05$.

- Sur l'intervalle $\left[\frac{e-2}{e-1}\,;1\right]$:
On a les deux images aux bornes de l'intervalle :
$g\Big(\frac{e-2}{e-1}\Big)\simeq 0{,}12 \quad ; \quad g(1)=0$
De plus, on a :
  - g est continue sur l'intervalle $\left[\frac{e-2}{e-1}\,;1\right]$
  - g est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{e-2}{e-1}\,;1\right]$
  - le nombre 0,05 est compris entre les images par la fonction g aux bornes de l'intervalle $\left[\frac{e-2}{e-1}\,;1\right]$.

  D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution β sur l'intervalle $\left[\frac{e-2}{e-1}\,;1\right]$ tel que :
  $g(\beta)=0{,}05$.

De plus, de l'appartenance des deux nombres α et β à des sous intervalles de $\left[0\,;1\right]$, on en déduit que $\alpha<\beta$.

Partie B

1. Le compteur c s'initialise avec la valeur 0 et s'incrémente chaque fois que la $\left|f(x)-x\right|$ est supérieur à 0,05.
Cet algorithme compte donc le nombre de nuances qui seront retouchées et dont la modification sera perceptible.

2. D'après le tableau de variation de la question **A.** 2. b. et les solutions de l'équation $f_2(x)-x=0{,}05$ de la question **A.** 2. c., l'inéquation $f_2(x)-x\geqslant 0{,}05$ a pour ensemble de solution $\left[\alpha\,;\beta\right]$.

Ainsi, seule les nuances ayant une valeur comprise entre 0,09 et 0,85 auront une modification perceptible : on compte au total 77 nuances.

L'algorithme renverra la valeur 77.

Partie C

1. a. La fonction f_3 admet l'expression suivante :
$f_3(x)=\frac{1}{2}\times 2x\cdot e^{(x^2-1)}$
Considérons la fonction u définie par :
$u(x)=x^2-1 \quad ; \quad u'(x)=2x$
On a ainsi l'expression suivante de la fonction f_3 :
$f_3(x)=\frac{1}{2}\times u'(x)\cdot e^{u(x)}$
Effectuons le calcul de $\mathcal{A}_{f_3}$:

$$\int_0^1 f_3(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{2}\times u'(x)\cdot e^{u(x)}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\cdot e^{u(x)}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\cdot e^{1^2-1}-\frac{1}{2}\cdot e^{0^2-1}=\frac{1}{2}\times e^0-\frac{1}{2}\cdot e^{-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot e^{-1}$$

b. Effectuons le calcul de $\mathcal{A}_{f_4}$:

$$\int_0^1 f_4(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 4x-15+\frac{60}{x+4}\,\mathrm{d}x$$
$$=\left[4\times\frac{1}{2}\cdot x^2-15\times x+60\times\Big(-\frac{1}{(x+4)^2}\Big)\right]_0^1$$
$$=\left[2\cdot x^2-15\cdot x+60\cdot\ln(x+4)\right]_0^1$$
$$=\left[2\times1^2-15\times1+60\cdot\ln(1+4)\right]-\left[2\times0^2-15\times0-60\cdot\ln(0+4)\right]$$
$$=2-15+60\cdot\ln 5-60\ln 4=2-15+60\cdot\ln\frac{5}{4}$$
$$=-13+60\cdot\ln\frac{5}{4}$$

2. On a les deux valeurs approchées suivantes :
$\mathcal{A}_{f_3}\simeq 0{,}316 \quad ; \quad \mathcal{A}_{f_4}\simeq 0{,}389$
On en déduit la comparaison : $\mathcal{A}_{f_3}\leqslant\mathcal{A}_{f_4}$
Ainsi, c'est la fonction de retouche f_3 qui éclaircie le plus une image.

Correction 6 *(Asie - Juin 2014)*

1. Les fonctions f_n semblent positive sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$. Ainsi, l'intégrale I_n définit l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_{f_n}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

De plus, on observe que les courbes des fonctions $\mathscr{C}_n$ sont placés les unes au dessus des autres. Ainsi, les aires définies par ces courbes doivent croître en fonction de n : on peut conjecturer que la suite $\left(I_n\right)$ est une suite croissante de nombres.

Toutes les courbes sont contenues dans un carré de côté 1 : ainsi, les valeurs de $\left(I_n\right)$ sont majorées par 1.

On peut conjecturer que la suite $\left(I_n\right)$ est convergente.

2. L'expression de la fonction f peut s'exprimer par :
$f_1(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{u'(x)}{u(x)}$
où la fonction u est définie par :
$u(x)=x+1 \quad ; \quad u'(x)=1$
On en déduit l'expression d'une primitive F_1 de la fonction f_1 :
$F_1(x)=\ln\left[u(x)\right]=\ln(x+1)$
Ainsi, on a le calcul de l'intégrale I_1 :

$$I_1=\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x=\left[F_1(x)\right]_0^1=\left[\ln(x+1)\right]_0^1$$
$$=\ln(1+1)-\ln(0+1)=\ln(2)-\ln(1)=\ln 2$$

3. a. Pour tout entier naturel n non-nul, on a la comparaison suivante pour tout réel $x\in\left[0\,;1\right]$:
$$x^n\geqslant 0$$
$$1+x^n\geqslant 1$$
La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\frac{1}{1+x^n}\leqslant\frac{1}{1}$$

b. Pour tout entier naturel n non-nul et pour tout réel $x\in\left[0\,;1\right]$, on a la comparaison :

$$\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$$

Par la propriété de positivité de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}x$$

$$I_n \leqslant \big[x\big]_0^1$$

$$I_n \leqslant 1-0$$

$$I_n \leqslant 1$$

4. Soit n un entier naturel non-nul. Etudions la différence :

$$\big(1-x^n\big) - \frac{1}{1+x^n} = \frac{\big(1-x^n\big)\big(1+x^n\big)-1}{1+x^n}$$

$$= \frac{1^2-\big(x^n\big)^2-1}{1+x^n} = \frac{1-x^{2n}-1}{1+x^n} = \frac{-x^{2n}}{1+x^n}$$

Sur l'intervalle $\big[0\,;1\big]$, on a la comparaison :

$$\frac{-x^{2n}}{1+x^n} \leqslant 0$$

$$\big(1-x^n\big) - \frac{1}{1+x^n} \leqslant 0$$

$$1-x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}$$

5. On a le calcul intégral suivant :

$$\int_0^1 \big(1-x^n\big)\,\mathrm{d}x = \Big[x - \frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}\Big]_0^1$$

$$= \Big(1-\frac{1}{n+1}\times 1^{n+1}\Big) - \Big(0-\frac{1}{n+1}\times 0^{n+1}\Big) = 1-\frac{1}{n+1}$$

6. Etudions la différence :

$$I_{n+1}-I_n = \int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Par la propriété de linéarité de l'intégrale :

$$= \int_0^1 f_{n+1}(x)-f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{1+x^n}{\big(1+x^{n+1}\big)\big(1+x^n\big)} - \frac{1+x^{n+1}}{\big(1+x^n\big)\big(1+x^{n+1}\big)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{\big(1+x^n\big)-\big(1+x^{n+1}\big)}{\big(1+x^n\big)\big(1+x^{n+1}\big)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{1+x^n-1-x^{n+1}}{\big(1+x^n\big)\big(1+x^{n+1}\big)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n-x^{n+1}}{\big(1+x^n\big)\big(1+x^{n+1}\big)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n\big(1-x\big)}{\big(1+x^n\big)\big(1+x^{n+1}\big)}\,\mathrm{d}x$$

Or, dans chacun des facteurs de l'expression :

$$\frac{x^n\big(1-x\big)}{\big(1+x^n\big)\big(1+x^{n+1}\big)}$$

est positif. On en déduit la comparaison suivante sur $\big[0\,;1\big]$:

$$\frac{x^n\big(1-x\big)}{\big(1+x^n\big)\big(1+x^{n+1}\big)} \geqslant 0$$

Par la propriété de positivité de l'intégrale :

$$I_{n+1}-I_n \geqslant 0$$

$$I_{n+1} \geqslant I_n$$

Ainsi, la suite $\big(I_n\big)$ est une suite croissante.

D'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite $\big(I_n\big)$ est convergente.

7. Des questions **3. a.** et **4.**, on obtient l'encadrement suivant pour tout nombre réel $x\in\big[0\,;1\big]$:

$$1-x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$$

Par la propriété de positivité de l'intégrale :

$$\int_0^1 1-x^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}x$$

$$1-\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \big[x\big]_0^1$$

$$1-\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1-0$$

$$1-\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} 1-\frac{1}{n+1} = 1 \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty} 1 = 1$$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} I_n = 1.$$

8. **a.** Voici le tableau complété :

k	x	I
0	$\frac{1}{5}$	0,2
1	$\frac{1}{10}$	0,3
2	$\frac{1}{25}$	0,34
3	$\frac{1}{50}$	0,36
4	$\frac{1}{85}$	0,372

b. Cette algorithme présente la méthode d'approximation d'une surface par pavage de rectangle : appelé également méthode des rectangles ou intégrale de Riemann.

Correction 7 *(Pondichéry - Avril 2014)*

1. On a le module :

$$\Big|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\Big| = \sqrt{\Big(\frac{3}{4}\Big)^2+\Big(\frac{\sqrt{3}}{4}\Big)^2} = \sqrt{\frac{9}{16}+\frac{3}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{12}{16}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi, le nombre complexe admet pour expression :

$$\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\Big)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\Big(\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot i\Big) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}$$

2. **a.** La définition de la suite $\big(r_n\big)$ donne pour les modules :

$$z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\right)\cdot z_n$$
$$\left|z_{n+1}\right| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\right)\cdot z_n\right|$$
$$r_{n+1} = \left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\right|\cdot\left|z_n\right|$$
$$r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot r_n$$

On vient de montrer que la suite $\left(r_n\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. On a :

$z_0 = 1 \implies \left|z_0\right| = 1 \implies r_0 = 1$

Ainsi, la suite $\left(r_n\right)$ est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Le terme de rang n, on a :

$$r_n = 1\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

c. Le module du complexe z_n représente la distance OA_n.

Du fait que $0 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, on a la limite :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$$

On en déduit la limite : $\lim_{n\mapsto+\infty} OA_n = 0$.

3. a. Voici un tableau affichant les valeurs des variables pendant l'exécution de la boucle *Tant que* :

	Initialisation	Boucle 1	Boucle 2	Boucle 3	Boucle 4	Boucle 5
R	1	0,865	0,75	0,650	0,562	0,487
n	0	1	2	3	4	5

Ainsi, la valeur affichée par l'algorithme sera la valeur 5.

b. Cet algorithme permet d'afficher le rang du premier terme de la suite $\left(r_n\right)$ passant sous la valeur P.

Ainsi, il affiche le rang du premier point A_n se trouvant dans le disque de centre O et de rayon P.

4. a. Etudions le quotient :

$$\frac{z_n - z_{n+1}}{0 - z_{n+1}} = \frac{z_n - \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\right)\cdot z_n}{\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\right)\cdot z_n} = \frac{\left[1 - \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\right)\right]\cdot z_n}{\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\right)\cdot z_n}$$
$$= \frac{1 - \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\right)}{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i} = \frac{1 - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i}{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i}{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i}$$
$$= \frac{1 - \sqrt{3}\cdot i}{3 + \sqrt{3}\cdot i} = \frac{\left(1 - \sqrt{3}\cdot i\right)\cdot\left(3 - \sqrt{3}\cdot i\right)}{\left(3 + \sqrt{3}\cdot i\right)\cdot\left(3 - \sqrt{3}\cdot i\right)}$$
$$= \frac{3 - \sqrt{3}\cdot i - 3\sqrt{3}\cdot i + \left(\sqrt{3}\right)^2\cdot i^2}{9 + 3} = \frac{3 - \left(3 + \sqrt{3}\right)\cdot i - 3}{12}$$
$$= \frac{\left(3 + \sqrt{3}\right)\cdot i}{12} = \frac{3 + \sqrt{3}}{12}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$$

On en déduit la valeur de l'argument de ce quotient :

$$\arg\left(\frac{z_n - z_{n+1}}{0 - z_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{2}$$
$$\left(\overrightarrow{A_{n+1}O}\,;\overrightarrow{A_{n+1}A_n}\right) = \frac{\pi}{2}$$

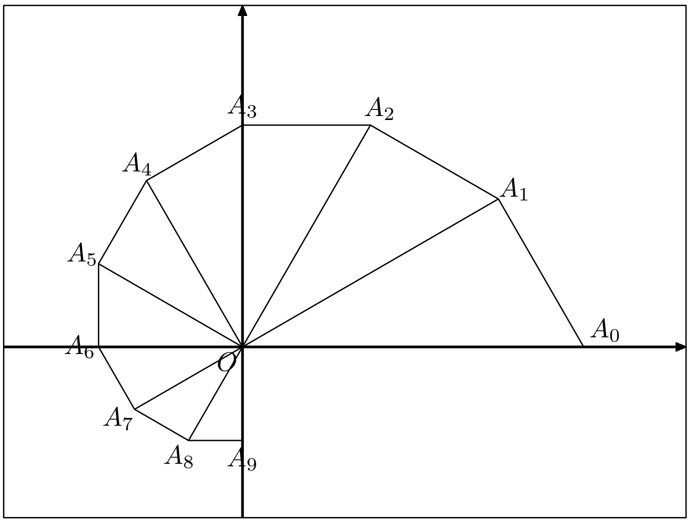
b. Pour que le point A_n appartiennent à l'axe des ordonnées, il est nécessaire que l'argument du complexe z_n ait pour expression :

$\arg z_n = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$	$\arg z_n = -\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$
$n\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$	$n\cdot\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$
$\frac{n}{6} = \frac{1}{2} + k$	$\frac{n}{6} = -\frac{1}{2} + k$
$n = 6\times\left(\frac{1}{2} + k\right)$	$n = 6\times\left(-\frac{1}{2} + k\right)$
$n = 3 + 6\cdot k$	$n = -3 + 6\cdot k$

On obtient l'ensemble des entiers naturel n tels que A_n appartiennent à l'axe des ordonnées :

$\mathcal{S} = \left\{3\,;6\,;9\,;12\ldots\right\}$

c. Voici la figure complétée :



Correction 8 *(Antilles-Guyanne - Septembre 2014)*

1. On a l'image :

$$f\left(-1+i\cdot\sqrt{3}\right) = \left(-1 + i\cdot\sqrt{3}\right)^2 + 2\cdot\left(-1 + i\cdot\sqrt{3}\right) + 9$$
$$= \left[\left(-1\right)^2 + 2\times(-1)\times i\cdot\sqrt{3} + \left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2\right] - 2 + 2\cdot i\cdot\sqrt{3} + 9$$
$$= 1 - 2\sqrt{3}\cdot i - 3 - 2 + 2\cdot i\cdot\sqrt{3} + 9 = 5$$

2. Résolvons l'équation :

$$f(z) = 5$$
$$z^2 + 2\cdot z + 9 = 5$$
$$z^2 + 2\cdot z + 9 - 5 = 0$$
$$z^2 + 2\cdot z + 4 = 0$$

Le polynôme $z^2+2\cdot z+4$ admet pour discriminant :

$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 2^2 - 4\times1\times4 = 4 - 16 = -12$

On a la simplification :

$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Le discriminant étant strictement négatif, cette équation admet les deux solutions complexes suivantes :

$$z_1 = \frac{-b-i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-2-2\sqrt{3}\cdot i}{2\times 1} = \frac{2\cdot\left(-1-\sqrt{3}\cdot i\right)}{2} = -1-\sqrt{3}\cdot i = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right) = 2\cdot\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\cdot e^{-i\cdot\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_2 = \frac{-b+i\cdot\sqrt{-\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-2+2\sqrt{3}\cdot i}{2\times 1} = \frac{2\cdot\left(-1+\sqrt{3}\cdot i\right)}{2} = -1+\sqrt{3}\cdot i = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right) = 2\cdot\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\cdot e^{-i\cdot\frac{\pi}{3}}$$

3. Considérons l'équation :
$$f(z) = \lambda$$
$$z^2+2\cdot z+9 = \lambda$$
$$z^2+2\cdot z+\left(9-\lambda\right) = 0$$
Le polynôme du membre de gauche a pour discriminant :
$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = 2^2-4\times 1\cdot\left(9-\lambda\right) = 4-36+4\cdot\lambda = -32+4\cdot\lambda$$
Ce polynôme admettra deux racines complexes conjuguées si son discriminant est strictement négatif :
$$\Delta < 0$$
$$-32+4\cdot\lambda < 0$$
$$4\cdot\lambda < 32$$
$$\lambda < \frac{32}{4}$$
$$\lambda < 8$$
Ainsi, il faut que la valeur de λ est strictement inférieur à 8 pour que l'équation $f(z)=\lambda$ admettent deux solutions complexes conjugués.

4. Soit z un nombre complexe. On a les équivalences suivantes :
$$M \text{ appartient à } (F) \iff \left|f(z)-8\right| = 3$$
$$\iff \left|\left(z^2+2\cdot z+9\right)-8\right| = 3 \iff \left|z^2+2\cdot z+1\right| = 3$$
$$\iff \left|\left(z+1\right)^2\right| = 3 \iff \left|z+1\right|^2 = 3$$
$$\iff \left|z-(-1)\right| = \sqrt{3} \iff \left|z_M-z_\Omega\right| = \sqrt{3}$$
$$\iff \Omega M = \sqrt{3}$$
Ainsi, l'ensemble (F) est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{3}$.

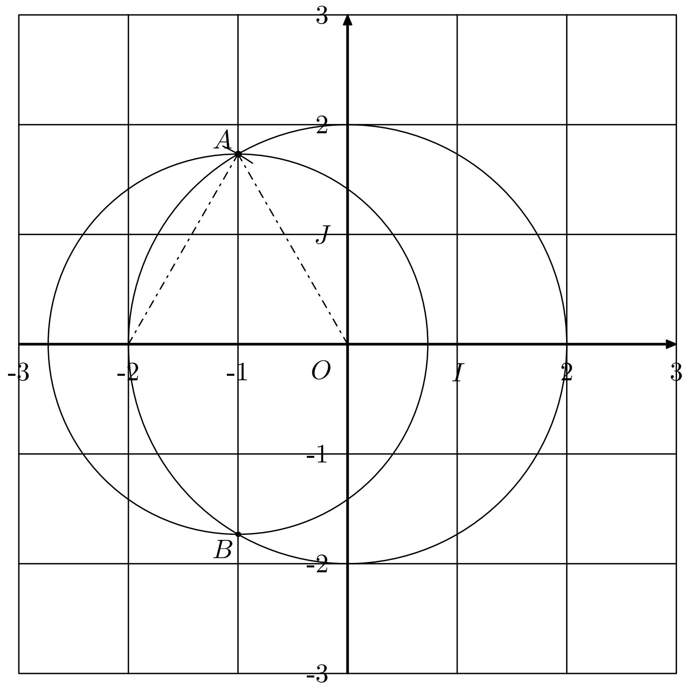
5. a. L'image $f(z)$ admet pour expression :
$$f(z) = \left(x+i\cdot y\right)^2+2\cdot\left(x+i\cdot y\right)+9$$
$$= x^2+2xy\cdot i+\left(i\cdot y\right)^2+2\cdot x+2y\cdot i+9$$
$$= x^2+2xy\cdot i-y^2+2\cdot x+2y\cdot i+9$$
$$= \left(x^2-y^2+2\cdot x+9\right)+i\cdot\left(2xy+2y\right)$$

b. Pour que $f(z)$ soit un nombre réel, il est nécessaire que sa partie imaginaire soit nulle. Etudions l'équation suivante :
$$2\cdot x\cdot y+2\cdot y = 0$$
$$2\cdot y\cdot\left(x+1\right) = 0$$
Dans $\mathbb{C}$, un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$2\cdot y = 0$	$x+1 = 0$
$y = 0$	$x = -1$

Etudions ces deux cas :
- L'ensemble des nombres vérifiant $y=0$ représente l'axe des abscisses.
- L'ensemble des nombres vérifiant $x=1$ est une droite verticale.

6. Soit z un point appartenant à l'ensemble (F), on a :
$$\left|z-(-1)\right| = \sqrt{3}$$
$$\left|z+1\right|^2 = 3$$
Notons $z=x+i\cdot y$ l'écriture algébrique de z :
$$\left|\left(x+i\cdot y\right)+1\right|^2 = 3$$
$$\left|\left(x+1\right)+i\cdot y\right|^2 = 3$$
$$(x+1)^2+y^2 = 3$$
$$x^2+2x+1+y^2 = 3$$
Déterminons les coordonnées des points d'intersection de (F) avec les deux droites D_1 et D_2 :
- Si $x=-1$:
$$x^2+2x+1+y^2 = 3$$
$$(-1)^2+2\times(-1)+1+y^2 = 3$$
$$1-2+1+y^2 = 3$$
$$y^2 = 3$$
Les deux points d'intersection avec cette droite ont pour affixe :
$$z_1 = -1+\sqrt{3}\cdot i \quad ; \quad z_2 = -1-\sqrt{3}\cdot i$$
- Si $y=0$:
$$x^2+2x+1+0^2 = 3$$
$$x^2+2x+1-3 = 0$$
$$x^2+2x-2 = 0$$
Ce polynôme a pour discriminant :
$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = 2^2-4\times 1\times(-2) = 4+8 = 12$$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines réelles :
$$x_3 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{2\times 1} = \frac{2\cdot\left(-1-\sqrt{3}\right)}{2} = -1-\sqrt{3}$$
$$x_4 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2\times 1} = \frac{2\cdot\left(-1+\sqrt{3}\right)}{2} = -1+\sqrt{3}$$
Voici les affixes des deux points d'intersection de l'ensemble (F) avec la droite D_2 :
$$z_3 = -1-\sqrt{3} \quad ; \quad z_4 = -1+\sqrt{3}$$



Correction 9 *(Métropole - Juin 2014)*

1. Le polynôme $Z^2{+}4{\cdot}Z{+}16$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 4^2 - 4{\times}1{\times}16 = 16 - 64 = -48$
On a la simplification : $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{48} = 4{\cdot}\sqrt{3}$

Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme admet les deux racines complexes suivantes :

$$z_1 = \frac{-b - i{\cdot}\sqrt{-\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-4 - i{\cdot}4\sqrt{3}}{2{\times}1} = \frac{2{\cdot}\big(-2 - i{\cdot}2\sqrt{3}\big)}{2} = -2 - i{\cdot}2\sqrt{3}$$

$$z_2 = \frac{-b + i{\cdot}\sqrt{-\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-4 + i{\cdot}4\sqrt{3}}{2{\times}1} = \frac{2{\cdot}\big(-2 + i{\cdot}2\sqrt{3}\big)}{2} = -2 + i{\cdot}2\sqrt{3}$$

Ainsi, cette équation admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \big\{-2{-}i{\cdot}2\sqrt{3}\ ;\ -2{-}i{\cdot}2\sqrt{3}\big\}$

2. D'après la définition de a, on a : $a = 2{\cdot}e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}$
Ainsi, on a :

$$a^2 = \big(2{\cdot}e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\big)^2 = 4{\cdot}e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}$$
$$= 4{\cdot}\Big[\cos\Big(\frac{2\pi}{3}\Big) + i{\cdot}\sin\Big(\frac{2\pi}{3}\Big)\Big] = 4{\cdot}\Big(-\frac{1}{2} + i{\cdot}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$
$$= -2 + i{\cdot}2\sqrt{3}$$

Le nombre complexe a admet pour écriture algébrique :

$$a = 2{\cdot}e^{i\cdot\frac{\pi}{3}} = 2{\cdot}\Big[\cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big) + i{\cdot}\sin\Big(\frac{\pi}{3}\Big)\Big]$$
$$= 2{\cdot}\Big(\frac{1}{2} + i{\cdot}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = 1 + i{\cdot}\sqrt{3}$$

Considérons l'équation suivante :

$$z^2 = -2 + 2{\cdot}i{\cdot}\sqrt{3}$$
$$z^2 = a^2$$
$$z^2 - a^2 = 0$$
$$\big(z+a\big)\big(z-a\big) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si au moins un de ses facteurs est nul :

$$z + a = 0 \qquad z = -a \qquad z = -\big(1 + i{\cdot}\sqrt{3}\big) \qquad z = -1 - i{\cdot}\sqrt{3}$$

$$z - a = 0 \qquad z = a \qquad z = 1 + i{\cdot}\sqrt{3}$$

Ainsi, cette équation admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \big\{-1{-}i{\cdot}\sqrt{3}\ ;\ 1{+}\sqrt{3}\big\}$

3. Considérons les deux écritures algébriques des nombres complexes z_1 et z_2 :
$z_1 = x + i{\cdot}y \quad ; \quad z_2 = x' + i{\cdot}y'$

- Etudions les deux membres de l'égalité :
  - $\overline{z_1{\cdot}z_2} = \overline{\big(x + i{\cdot}y\big)\big(x' + i{\cdot}y'\big)}$
    $= \overline{x{\cdot}x' + i{\cdot}x{\cdot}y' + i{\cdot}x'{\cdot}y + i^2{\cdot}y{\cdot}y'}$
    $= \overline{\big(x{\cdot}x' - y{\cdot}y'\big) + i{\cdot}\big(x{\cdot}y' + x'{\cdot}y\big)}$
    $= \big(x{\cdot}x' - y{\cdot}y'\big) - i{\cdot}\big(x{\cdot}y' + x'{\cdot}y\big)$
    $= \big(x{\cdot}x' - y{\cdot}y'\big) + i{\cdot}\big(-x{\cdot}y' - x'{\cdot}y\big)$
  - $\overline{z_1}{\cdot}\overline{z_2} = \big(\overline{x + i{\cdot}y}\big){\cdot}\big(\overline{x' + i{\cdot}y'}\big)$
    $= \big(x - i{\cdot}y\big){\cdot}\big(x' - i{\cdot}y'\big)$
    $= x{\cdot}x' - i{\cdot}x{\cdot}y' - i{\cdot}x'{\cdot}y + i^2{\cdot}y{\cdot}y'$
    $= \big(x{\cdot}x' - y{\cdot}y'\big) + i{\cdot}\big(-x{\cdot}y' - x'{\cdot}y\big)$

  On vient d'établir l'égalité : $\overline{z_1{\cdot}z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

- Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :
  $\mathcal{P}_n$: "$\overline{z^n} = \overline{z}^n$"
  Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non-nul.
  - **Initialisation :**
    On a : $\overline{z^1} = \overline{z} \quad ; \quad \overline{z}^1 = \overline{z}$
    On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.
  - **Hérédité :**
    Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n non-nul quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence suivante :
    $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
    On a les transformations algébriques suivantes :
    $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \cdot z}$
    D'après la propriété précédente :
    $= \overline{z^n} \cdot \overline{z}$
    D'après l'hypothèse de récurrence :
    $= \overline{z}^n \cdot \overline{z} = \overline{z}^{n+1}$
    On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.
  - **Conclusion :**
    La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 1 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non-nul.

4. Soit z une solution de l'équation (E). On a :
$z^4 + 4{\cdot}z^2 + 16 = 0$

Etudions l'expression suivante :

$\left(\overline{z}\right)^4+4\cdot\left(\overline{z}\right)^2+16$

A l'aide de la seconde propriété de la question 3. :

$=\overline{z^4}+4\cdot\overline{z^2}+16$

A l'aide de la première propriété de la question 3. :

$=\overline{z^4}+\overline{4\cdot z^2}+16$

Le nombre 16 étant réel : $\overline{16}=16$

$=\overline{z^4}+\overline{4\cdot z^2}+\overline{16}=\overline{z^4+4\cdot z^2+16}$

Le complexe z est solution de (E) :

$=\overline{0}=0$

Ainsi, $\overline{z}$ est une solution de (E).

Montrons que a et $-a$ sont deux solutions de l'équation (E) :

- $a^4+4\cdot a^2+16=\left(a^2\right)^2+4\cdot a^2+16$

  $=\left(-2+2\cdot i\cdot\sqrt{3}\right)^2+4\cdot\left(-2+2\cdot i\cdot\sqrt{3}\right)+16$

  D'après la question 1. :

  $=0$
- $(-a)^4+4\cdot(-a)^2+16=\left[(-a)^2\right]^2+4\cdot(-a)^2+16$

  $=\left(-2+2\cdot i\cdot\sqrt{3}\right)^2+4\cdot\left(-2+2\cdot i\cdot\sqrt{3}\right)+16$

  D'après la question 1. :

  $=0$

D'après la propriété montrée en début de cette question, les conjugués de ces nombres complexes sont également solutions de l'équation (E) ; on obtient deux nouvelles solutions de l'équation (E) :

- $\overline{a}=\overline{-2+2\cdot i\cdot\sqrt{3}}=-2-2\cdot i\cdot\sqrt{3}$
- $\overline{-a}=\overline{-\left(-2+2\cdot i\cdot\sqrt{3}\right)}=\overline{2-2\cdot i\cdot\sqrt{3}}=2+2\cdot i\cdot\sqrt{3}$

Voici l'ensemble des solutions de l'équation (E) :

$\mathcal{S}=\left\{-2-2\cdot i\cdot\sqrt{3}\,;\,-2+2\cdot i\cdot\sqrt{3}\,;\,2-2\cdot i\cdot\sqrt{3}\,;\,2+2\cdot i\cdot\sqrt{3}\right\}$

Correction 10

(Polynésie - Juin 2014)

1. Voici les valeurs des trois premiers termes de la suite :
   - $u_0=0$
   - $u_1=u_0+2\times0+2=0+2=2$
   - $u_2=u_1+2\times1+2=2+2+2=6$

2. L'algorithme 1 ne permet pas d'obtenir les termes de la suite $\left(u_n\right)$ car lors de la première exécution de l'instruction dans la boucle, la variable u va prendre la valeur :

   $u=0+2\times1+2=2+2=4$

   Ce qui ne correspond pas au terme de rang 1 de la suite $\left(u_n\right)$.

3. a. On peut conjecturer que la suite $\left(u_n\right)$ est croissante.

   Pour établir cette conjecture, étudions la différence suivante :

   $u_{n+1}-u_n=\left(u_n+2\cdot n+2\right)-u_n=2\cdot n+2$

   n étant un entier naturel, on a :

   $$2\cdot n+2\geqslant0$$
   $$u_{n+1}-u_n\geqslant0$$
   $$u_{n+1}\geqslant0$$

   On en déduit que la suite $\left(u_n\right)$ est croissante.

   b. En utilisant les trois premiers termes de la suite $\left(u_n\right)$:

   $$\begin{cases}u_0=0\\u_1=2\\u_2=6\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a\times0^2+b\times0+c=0\\a\times1^2+b\times1+c=2\\a\times2^2+b\times2+c=6\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}c=0\\a+b+c=2\\4\cdot a+2\cdot b+c=6\end{cases}$$

   $$\Longrightarrow\begin{cases}c=0\\a+b=2\\4\cdot a+2\cdot b=6\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}c=0\\4\cdot a+4\cdot b=8\\4\cdot a+2\cdot b=6\end{cases}$$

   Par soustraction de la seconde ligne par la troisième, on obtient :

   $$\left(4\cdot a+4\cdot b\right)-\left(4\cdot a+2\cdot b\right)=8-6$$
   $$2\cdot b=2$$
   $$b=1$$

   De la seconde équation, on en déduit la valeur de a :

   $$a+b=2$$
   $$a+1=2$$
   $$a=1$$

   Ainsi, dans le cadre de cette conjecture, le terme de rang n s'écrit :

   $u_n=n^2+n$

4. a. On a :

   $v_n=u_{n+1}-u_n=\left(u_n+2\cdot n+2\right)-u_n=2\cdot n+2$

   Cette forme est celle d'une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 2.

   b. La formule de la somme des termes d'une suite arithmétique permet d'écrire :

   $$S_n=\sum_{k=0}^{n}v_k=\frac{\left(v_0+v_n\right)\cdot\left(n+1\right)}{2}$$
   $$=\frac{\left[\left(2\times0+2\right)+\left(2\times n+2\right)\right]\cdot\left(n+1\right)}{2}$$
   $$=\frac{\left(2\cdot n+4\right)\cdot\left(n+1\right)}{2}=\frac{2\cdot\left(n+2\right)\cdot\left(n+1\right)}{2}=\left(n+2\right)\left(n+1\right)$$

   c. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :

   $\mathcal{P}_n$: "$S_n=u_{n+1}-u_0$"

   Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

   - **Initialisation :**

     On a :

     $S_0=v_0\quad;\quad u_{0+1}-u_0=u_1-u_0=v_0$

     La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :**

     Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse par récurrence :

     $S_n=u_{n+1}-u_0$

     Etudions l'expression :

     $$S_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}v_k=\left(\sum_{k=0}^{n}v_k\right)+v_{n+1}$$

     D'après l'hypothèse de récurrence :

     $$=\left(u_{n+1}-v_0\right)+v_{n+1}$$
     $$=u_{n+1}-u_0+\left(u_{n+2}-u_{n+1}\right)=u_{n+2}-u_0$$

     On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - **Conclusion :**

     La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. Ainsi, on vient d'établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

   De la propriété précédente, on a pour tout entier naturel n non-nul :

$$S_{n-1} = u_n - u_0$$
$$n\cdot(n+1) = u_n - 0$$
$$u_n = n\cdot(n+1)$$

Cette expression a été établie pour tout entier naturel n non-nul. Montrons qu'elle est également vraie pour $n=0$:

$u_0 = 0 \quad ; \quad 0\cdot\big(0+1\big) = 0\times1 = 0$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a :

$u_n = n\cdot\big(n+1\big)$

Correction 11 *(Métropole - Septembre 2014)*

1. a. La quantité de médicament baisse de 20 % par minutes. Or, une réduction de 20 % est associée à une coefficient multiplicateur de 0,8.
On en déduit que la suite $\big(u_n\big)$ est une suite géométrique de premier terme 10 et de raison 0,8.

b. Les termes d'une suite géométrique s'expriment explicitement en foncion de leur rang n par la formule :
$$u_n = u_0 \cdot q^n$$
$$= 10\times0{,}8^n$$

c. 1 % de $10\,m\ell$ représente $0{,}1\,\ell$. Considérons l'inéquation :
$$u_n < 0{,}1$$
$$10\times0{,}8^n < 0{,}1$$
$$0{,}8^n < \frac{0{,}1}{10}$$
$$0{,}8^n < 0{,}01$$
La fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\ln\big(0{,}8^n\big) < \ln\big(0{,}01\big)$$
$$n\cdot\ln\big(0{,}8\big) < \ln\big(0{,}01\big)$$
De $0{,}8<1$, le nombre $\ln 0{,}8$ est négatif :
$$n > \frac{\ln\big(0{,}01\big)}{\ln\big(0{,}8\big)} \simeq 20{,}6$$
$$n \geqslant 21\,min$$
Ainsi, c'est à partir de 21 minutes que la concentration du produit initial atteint 1 %.

2. a. Voici le tableau complété :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
v_n	10	8	6,4	5,12	8,10	6,48	5,18	8,15

n	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

b. Au bout de 15 minutes :
- on a injecté les $10\,m\ell$ initiaux ;
- et on a rajouté quatre fois la quantité supplémentaire de $4\,m\ell$.

Ainsi, au bout de 15 minutes le patient a reçu $26\,m\ell$ de produit en injection.

c. Voici l'algorithme recherché :

```
      Variables : n est un entier naturel
                  v est un nombre réel.
 Initialisation : Affecter à v la valeur 10.
     Traitement : Pour n allant de 1 à 30
                    Affecter à v la valeur 0,8×v.
                    Si v<6 alors affecter à v la valeur v+2
                    Afficher v
                  Fin de boucle
```

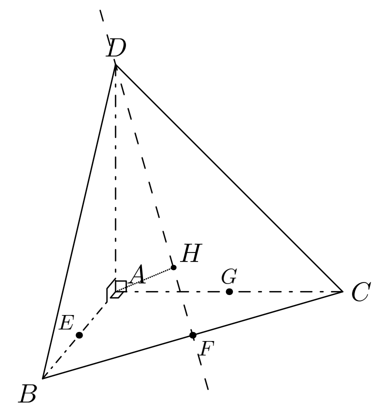
3. a. La quantité présente dans le sang diminue de 20 % par minute. Cette réduction est associée à un coefficient multiplicateur de 0,8.
Ainsi, de la quantité w_n qu'il avait à un instant, il ne lui en restera que $0{,}8\cdot w_n$ la minute suivante.
Or, rajoutant à chaque minute $1\,m\ell$, la nouvelle quantité w_{n+1} aura pour valeur :
$w_n = 0{,}8\cdot w_n + 1$

b. Etudions le quotient suivant :
$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{w_{n+1}-5}{w_n-5} = \frac{\big(0{,}8\cdot w_n+1\big)-5}{w_n-5} = \frac{0{,}8\cdot w_n-4}{w_n-5}$$
$$= \frac{0{,}8\cdot\Big(w_n-\dfrac{4}{0{,}8}\Big)}{w_n-5} = \frac{0{,}8\cdot\big(w_n-5\big)}{w_n-5} = 0{,}8$$
On en déduit que la suite $\big(z_n\big)$ est une suite géométrique de raison 0,8.
Le premier terme de la suite $\big(z_n\big)$ a pour valeur :
$z_0 = w_0 - 5 = 10 - 5 = 5$

c. La suite $\big(z_n\big)$ est une suite géométrique de premier terme 5 et de raison 0,8. On en déduit l'expression de la valeur du terme de rang n :
$z_n = 5\times0{,}8^n$
D'après la définition des termes de la suite $\big(z_n\big)$:
$$z_n = w_n - 5$$
$$5\times0{,}8^n = w_n - 5$$
$$w_n = 5\times0{,}8^n + 5$$

d. De l'encadrement $0\leqslant 0{,}8<1$, on en déduit :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 0{,}8^n = 0$
On en déduit la limite :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} w_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} 5\times0{,}8^n + 5 = 5$
On peut donc en conclure qu'avec ce dispostif, le patient verra la quantité de médicament dans le sens se stabiliser vers une quantité de $5\,m\ell$.

Correction 12 *(Métropole - Juin 2014)*



1. a. Le point D a pour coordonnées :
$D\,\big(0\,;0\,;1\big)$
On a les coordonnées des deux points suivants :

$B\left(1\,;0\,;0\right) \quad ; \quad C\left(0\,;1\,;0\right)$

Le point F étant le milieu du segment $[BC]$, on en déduit :

$$F\left(\frac{x_B+x_C}{2}\,;\frac{y_B+y_C}{2}\,;\frac{z_B+z_C}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$$

b. Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur directeur de la droite (DF) et a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{DF}(x_F-x_D\,;y_F-y_D\,;z_F-z_D)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-0\,;\frac{1}{2}-0\,;0-1\right)=\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;-1\right)$$

La droite (DF) admet pour représentation paramétrique :

$$(DF):\left\{\begin{array}{l} x=0+\frac{1}{2}\cdot t\\ y=0+\frac{1}{2}\cdot t \quad t\in\mathbb{R}\\ z=1-\ \ t\end{array}\right.$$

c. Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. Ainsi, le plan $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme :

$$\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot y-z+d=0 \quad \text{où } d\in\mathbb{R}$$

Le point A appartenant au plan $\mathcal{P}$, on en déduit que ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$:

$$\frac{1}{2}\cdot x_A+\frac{1}{2}\cdot y_A-z_A+d=0$$
$$\frac{1}{2}\times0+\frac{1}{2}\times0-0+d=0$$
$$0+d=0$$
$$d=0$$

Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation :

$$\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot y-z=0$$

d. Considérons M un point d'intersection de la droite (DF) avec le plan $\mathcal{P}$.

- Le point M appartenant à la droite (DF), on en déduit l'existence d'un réel t tel que :
$$M\left(\frac{1}{2}\cdot t\,;\frac{1}{2}\cdot t\,;1-t\right)$$
- Le point M appartient au plan $\mathcal{P}$, ses coordonnées vérifient l'équation du plan :
$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot t\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot t\right)-(1-t)=0$$
$$\frac{1}{4}\cdot t+\frac{1}{4}\cdot t-1+t=0$$
$$\frac{3}{2}\cdot t-1=0$$
$$\frac{3}{2}\cdot t=1$$
$$t=\frac{2}{3}$$

Ainsi, le point M a pour coordonnées :

$$M\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\,;\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\,;1-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$$

e. On a les coordonnées des deux vecteurs :

- $\overrightarrow{HE}\,(x_E-x_H\,;y_E-y_H\,;z_E-z_H)$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\,;0-\frac{1}{3}\,;0-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{6}\,;-\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{3}\right)$$
- $\overrightarrow{HG}\,(x_G-x_H\,;y_G-y_H\,;z_G-z_H)$
$$=\left(0-\frac{1}{3}\,;\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\,;0-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}\,;\frac{1}{6}\,;-\frac{1}{3}\right)$$

On a le produit scalaire :

$$\overrightarrow{HE}\cdot\overrightarrow{HG}=\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$=-\frac{1}{18}-\frac{1}{18}+\frac{1}{9}=0$$

On en déduit que les vecteur $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont orthogonaux : l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.

2. a. Le point M appartenant à la droite (DF), on en déduit l'existence d'un réel t tel que :

$$M\left(\frac{1}{2}\cdot t\,;\frac{1}{2}\cdot t\,;1-t\right)$$

Ainsi, on a :

$$ME^2=\left(x_E-x_M\right)^2+\left(y_E-y_M\right)^2+\left(z_E-z_M\right)^2$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot t\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\cdot t\right)^2+\left[0-(1-t)\right]^2$$
$$=\left(\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\cdot t+\frac{1}{4}\cdot t^2\right)+\frac{1}{4}\cdot t^2+1-2\cdot t+t^2$$
$$=\frac{3}{2}\cdot t^2-\frac{5}{2}\cdot t+\frac{5}{4}$$

b. Déterminons la valeur de MG^2 :

$$MG^2=\left(x_G-x_M\right)^2+\left(y_G-y_M\right)^2+\left(z_G-z_M\right)^2$$
$$=\left(0-\frac{1}{2}\cdot t\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot t\right)^2+\left[0-(1-t)\right]^2$$
$$=\frac{1}{4}\cdot t^2+\left(\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\cdot t+\frac{1}{4}\cdot t^2\right)+1-2\cdot t+t^2$$
$$=\frac{3}{2}\cdot t^2-\frac{5}{2}\cdot t+\frac{5}{4}$$

Ainsi, pour tout réel t, on a l'égalité :

$$ME^2=MG^2$$

Les deux nombres ME et MG étant positif :

$$ME=MG$$

On en déduit que le triangle MGE est un triangle isocèle.

Notons I le milieu du segment $[EG]$ qui a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{x_E+x_G}{2}\,;\frac{y_E+y_G}{2}\,;\frac{z_E+z_G}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{\frac{1}{2}+0}{2}\,;\frac{0+\frac{1}{2}}{2}\,;\frac{0+0}{2}\right)=\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\,;0\right)$$

Le triangle MEG étant isocèle en M, on en déduit :

- (MI) est la hauteur issue de M dans le triangle MEG : le triangle MEI est rectangle en I.
- (MI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{EMI}$:
$$\widehat{EMI}=\frac{\alpha}{2}$$
- On a :
$$EI=\sqrt{\left(x_I-x_E\right)^2+\left(y_I-y_E\right)^2+\left(z_I-z_E\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}-0\right)^2+\left(0-0\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+0^2}=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}$$
$$=\sqrt{\frac{2}{16}}=\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}$$

Dans le triangle MEI rectangle en I, on a le rapport trigonométrique suivant :

$$\sin\widehat{EMI} = \frac{EI}{EM}$$
$$ME\cdot\sin\widehat{EMI} = EI$$
$$ME\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}$$

c. α est la mesure d'un angle du triangle EMH : sa mesure appartient à l'intervalle $\left[0\,;\pi\right]$. On en déduit :
$\frac{\alpha}{2}\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$
Or, la fonction sin est strictement croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
On en déduit l'assertion : α est maximale, si et seulement si, $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.

Démontrons la seconde équivalence :

- Notons α_0 la valeur maximale de α et respectivement M_0 et M la position du point associée à chacun de ces angles :
$$\alpha \leqslant \alpha_0$$
$$\frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{\alpha_0}{2}$$
La fonction sinus est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$:
$$0 < \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leqslant \sin\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)$$
La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \geqslant \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)}$$
$$\frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\times\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}} \geqslant \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)}\times\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}$$
$$ME \geqslant M_0E$$
La fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}$:
$$ME^2 \geqslant M_0E^2$$
On en déduit que la distance M_0E^2 est alors minimale.
- La réciproque est immédiate.

d. Or, le polynôme $\frac{3}{2}\cdot t^2 - \frac{5}{2}\cdot t + \frac{5}{4}$ est du second degré et son coefficient du second degré positif. Il admet un minimum atteint pour la valeur de t_0 :
$$t_0 = -\frac{b}{2\cdot a} = -\frac{-\frac{5}{2}}{2\times\frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{3} = \frac{5}{6}$$
Ainsi, la mesure α de l'angle $\widehat{EMG}$ est maximale pour le point M_0 définie par :
$$M_0\left(\frac{1}{2}\cdot t_0\,;\frac{1}{2}\cdot t_0\,;1-t_0\right) = \left(\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}\,;\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}\,;1-\frac{5}{6}\right)$$
$$= \left(\frac{5}{12}\,;\frac{5}{12}\,;\frac{1}{6}\right)$$

Correction 13 *(Métropole - Septembre 2014)*

1. On a les coordonnées suivantes des vecteurs :

- $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;y_B - y_A\,;z_B - z_A)$
$= \left(1-1\,;\sqrt{3}-(-\sqrt{3})\,;0-0\right) = \left(0\,;2\sqrt{3}\,;0\right)$
- $\overrightarrow{DA}\,(x_A - x_D\,;y_A - y_D\,;z_A - z_D)$
$= \left(1-0\,;-\sqrt{3}-0\,;0-2\sqrt{2}\right) = \left(1\,;-\sqrt{3}\,;-2\sqrt{2}\right)$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : les points A, B et D ne sont pas colinéaires.
On en déduit que les trois points A, B et D ne sont pas alignés.

Vérifions que ces trois points vérifient l'équation du plan proposée :

- $4\cdot x_A + z_A\cdot\sqrt{2} = 4\times1 + 0\times\sqrt{2} = 4$
Les coordonnées du point A vérifient cette équation.
- $4\cdot x_B + z_B\cdot\sqrt{2} = 4\times1 + 0\times\sqrt{2} = 4$
Les coordonnées du point B vérifient cette équation.
- $4\cdot x_D + z_D\cdot\sqrt{2} = 4\times0 + 2\sqrt{2}\times\sqrt{2} = 4$
Les coordonnées du point D vérifient cette équation.

Ainsi, le plan (ABD) a pour équation cartésienne :
$4\cdot x + z\cdot\sqrt{2} = 4$

2. a. D'après sa représentation paramétrique, la droite $\mathcal{D}$ admet pour vecteur directeur :
$\overrightarrow{u}\left(1\,;0\,;\sqrt{2}\right)$
Or, le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{CD} = (x_D - x_C\,;y_D - y_C\,;z_D - z_C)$
$= \left(0-(-2)\,;0-0\,;2\sqrt{2}-0\right) = \left(2\,;0\,;2\sqrt{2}\right)$
On obtient la relation $\overrightarrow{CD} = 2\cdot\overrightarrow{u}$: on en déduit que les vecteur $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.
La droite $\mathcal{D}$ est parallèle à la droite (CD).
Le point définie par la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ et pour $t=0$ a pour coordonnées :
$M\left(0\,;0\,;0\times\sqrt{2}\right) = \left(0\,;0\,;0\right)$.
La droite $\mathcal{D}$ passe par le point O.

b. Le point G appartenant à la droite $\mathcal{D}$, il existe un réel t tel que le point G ait pour coordonnées :
$G\left(t\,;0\,;t\cdot\sqrt{2}\right)$
Le point G appartient au plan $\mathcal{D}$; ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan (ABC) :
$$4\cdot x_G + z_G\cdot\sqrt{2} = 4$$
$$4\cdot t + \left(t\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2} = 4$$
$$4\cdot t + 2t = 4$$
$$6\cdot t = 4$$
$$t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
Ainsi, le point G a pour coordonnées :
$$G\left(\frac{4}{6}\,;0\,;\frac{2}{3}\times\sqrt{2}\right) = \left(\frac{4}{6}\,;0\,;\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

3. a. Le point L étant le milieu du segment $[AC]$, il a pour coordonnées :
$$L\left(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\frac{y_A+y_C}{2}\,;\frac{z_A+z_C}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{1+(-2)}{2}\,;\frac{-\sqrt{3}+0}{2}\,;\frac{0+0}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;0\right)$$
On a les coordonnées des deux vecteurs :

- $\overrightarrow{BL} = (x_L - x_B\,;y_L - y_B\,;z_L - z_B)$

$$= \left(-\frac{1}{2} - 1\,;-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\,;0-0\right)$$

$$= \left(-\frac{3}{2}\,;-\frac{3\sqrt{3}}{2}\,;0\right)$$

- $\overrightarrow{BO}\,(x_B - x_O\,;y_B - y_O\,;z_B - z_O)$

$$= \left(1-0\,;\sqrt{3}-0\,;0-0\right) = \left(1\,;\sqrt{3}\,;0\right)$$

On obtient la relation : $\overrightarrow{BL} = -\frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{BO}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{BO}$ sont colinéaires : on en déduit que les points B, O et L sont alignés.
Le point O appartient à la droite (BL).

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A\,;y_C - y_A\,;z_C - z_A)$$

$$= \left(-2-1\,;0-(-\sqrt{3})\,;0-0\right) = \left(-3\,;\sqrt{3}\,;0\right)$$

Considérons le produit scalaire suivant :

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BL} = -3\times\left(-\frac{3}{2}\right) + \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + 0\times 0$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0$$

On en déduit que les droites (AC) et (BL) sont orthogonales.

b. Déterminons les trois longueurs du triangle ABC :

- $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}$

$$= \sqrt{\left(1-1\right)^2 + \left(\sqrt{3}-(-\sqrt{3})\right)^2 + \left(0-0\right)^2}$$

$$= \sqrt{0^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

- $AC = \sqrt{\left(x_C - x_A\right)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2 + \left(z_C - z_A\right)^2}$

$$= \sqrt{\left(-2-1\right)^2 + \left(0-(-\sqrt{3})\right)^2 + \left(0-0\right)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

- $CB = \sqrt{\left(x_B - x_C\right)^2 + \left(y_B - y_C\right)^2 + \left(z_B - z_C\right)^2}$

$$= \sqrt{\left(1-(-2)\right)^2 + \left(\sqrt{3}-0\right)^2 + \left(0-0\right)^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Les trois côtés du triangle ABC ont même mesure : le triangle ABC est un triangle équilatéral.

4. Déterminons la mesure des trois autres arêtes :

- $AD = \sqrt{\left(x_D - x_A\right)^2 + \left(y_D - y_A\right)^2 + \left(z_D - z_A\right)^2}$

$$= \sqrt{\left(0-1\right)^2 + \left(0-(-\sqrt{3})\right)^2 + \left(2\sqrt{2}-0\right)^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1+3+8} = \sqrt{12}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

- $DB = \sqrt{\left(x_B - x_D\right)^2 + \left(y_B - y_D\right)^2 + \left(z_B - z_D\right)^2}$

$$= \sqrt{\left(1-0\right)^2 + \left(\sqrt{3}-0\right)^2 + \left(0-2\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1+3+8} = \sqrt{12}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

- $DC = \sqrt{\left(x_C - x_D\right)^2 + \left(y_C - y_D\right)^2 + \left(z_C - z_D\right)^2}$

$$= \sqrt{\left(-2-0\right)^2 + \left(0-0\right)^2 + \left(0-2\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{12}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

Les six arêtes du tétraèdres sont de même mesure : le tétraèdre est régulier.