Proposition :

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.
A et B sont indépendants

$$\iff \quad \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}_A(B) \quad \iff \quad \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}_B(A)$$

Preuve :

A est un évènement de probabilité non-nulle. Alors :

$$\mathcal{P}_A(B) = \frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(A)}$$

On a les équivalences :

$$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}_A(B) \iff \mathcal{P}(B) = \frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(A)}$$

$$\iff \mathcal{P}(B)\times\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A\cap B)$$

$\Longrightarrow$ A et B sont indépendants

Proposition :

Soient A et B deux évènements.
Si A et B sont deux évènements indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Preuve :

Soient A et B deux évènements indépendants.

Les évènements A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B\cap A) + \mathcal{P}(B\cap\overline{A})$$

On en déduit :

$$\mathcal{P}(B\cap\overline{A}) = \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(B\cap A)$$

Les évènements A et B étant indépendants :

$$\mathcal{P}(B\cap\overline{A}) = \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(B)\times\mathcal{P}(A)$$

$$\mathcal{P}(B\cap\overline{A}) = \mathcal{P}(B)\cdot\big[1 - \mathcal{P}(A)\big]$$

$$\mathcal{P}(B\cap\overline{A}) = \mathcal{P}(B)\times\mathcal{P}(\overline{A})$$

Proposition :

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.
A et B sont indépendants

$$\iff \quad \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}_A(B) \quad \iff \quad \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}_B(A)$$

Preuve :

A est un évènement de probabilité non-nulle. Alors :

$$\mathcal{P}_A(B) = \frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(A)}$$

On a les équivalences :

$$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}_A(B) \iff \mathcal{P}(B) = \frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(A)}$$

$$\iff \mathcal{P}(B)\times\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A\cap B)$$

$\Longrightarrow$ A et B sont indépendants

Proposition :

Soient A et B deux évènements.
Si A et B sont deux évènements indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Preuve :

Soient A et B deux évènements indépendants.

Les évènements A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B\cap A) + \mathcal{P}(B\cap\overline{A})$$

On en déduit :

$$\mathcal{P}(B\cap\overline{A}) = \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(B\cap A)$$

Les évènements A et B étant indépendants :

$$\mathcal{P}(B\cap\overline{A}) = \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(B)\times\mathcal{P}(A)$$

$$\mathcal{P}(B\cap\overline{A}) = \mathcal{P}(B)\cdot\big[1 - \mathcal{P}(A)\big]$$

$$\mathcal{P}(B\cap\overline{A}) = \mathcal{P}(B)\times\mathcal{P}(\overline{A})$$

