Arithmétiques : diviseurs, multiples et entiers premiers

A. Diviseurs et multiples :

Définition : soit a et b deux entiers où b est non-nul $(b\neq 0)$. On dit que a est un **multiple de b** s'il existe un entier k tel que : $a=k\times b$

Remarque :

- Si a est un multiple de a, on dit aussi que b est un **diviseur de b**.
- Dire que a est un multiple de b est équivalent à dire que la division euclidienne de a par b a un reste nul.
- Ci-contre, est donnée la division euclidienne de 224 par 7. La division euclidienne donne la relation :
$$224=32\times 7+0 \implies 224=32\times 7$$
Donc, 224 est un multiple de 7.
- On remarquera que la division euclidienne précédente montre que 7 est un diviseur de 224 mais aussi que 32 est un diviseur de 224.

$$\begin{array}{r|l} 2\,2\,4 & 7 \\ \cline{2-2} -2\,1 & 32 \\ \cline{1-1} 1\,4 & \\ -\,1\,4 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

B. Critère de divisibilité :

Critère de divisibilité :
Un entier est un multiple :

- **de 2** : si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6, 8 ;
- **de 3** : si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;
- **par 5** : si son chiffre des unités est 0, 5 ;
- **par 9** : si la somme de ses chiffres est un multiple d 9.

Critère de divisibilité :
Un entier est un multiple :

- **de 4** : si le nombre formé par ses chiffres des dizaines et des unités est un multiple de 4.
- **de 7** : si la somme de son nombre de dizaine et de quintuple de son chiffre des untis est divisble par 7.
- **de** 25 : si le nombre formé par ses chiffres des dizaines et des unités vaut 0, 25, 50 ou 75.

Exemple :

- L'entier 6416 est divisible par 4 car 16 l'est.
- Pour montrer que 2478 utilisons l'algorithme proposé plusieurs fois : $2478 \rightsquigarrow 247+5\times 8=287$
$\rightsquigarrow 28+5\times 7=63$
L'entier 63 étant un multiple de 7, on en déduit que les nombres 287 et 2478 sont aussi divisible par 7
- L'entier 5475 est un multiple de 25 car cet entier se termine par 75.

C. Etude de la parité des entiers :

Définition :

- Un entier est dit **pair** si ce nombre est un multiple de 2.
- Un entier est dit **impair** si ce nombre n'est pas un entier pair.

Proposition :

- Si a est un entier pair alors il existe un entier k tel que : $a=2\times k$
- Si a est un entier impair alors il existe un entier k tel que : $a=2\times k+1$

Preuve :

- Si a est un entier pair alors il est divisible par 2.
La divsion euclidienne donnt un quotient k et un reste de 0 permettant d'écrire :
$a=2\times k+0$
$a=2\times k$
- Si a est un entier impair alors il n'est pas divisible par 2. Le reste n'étant pas nul, il vaut nécessairement 1 et on a l'existence d'un entier k tel que :
$a=2\times k+1$

Proposition : voici l'étude de la parité de l'addition et de la multiplication :

+	Pair	Impair
Pair	Pair	Impair
Impair	Impair	Pair

×	Pair	Impair
Pair	Pair	Pair
Impair	Pair	Impair

Idée de preuve : Soit a et b deux entiers impairs, alors on a l'existence de deux entiers k et k' tels que :
$a=2\cdot k+1 \quad ; \quad b=2\cdot k'+1$

- Montrons que la somme de deux entiers impairs est paire :
$$\begin{aligned} a+b &= \big(2\times k+1\big)+\big(2\times k'+1\big) \\ &= 2\times k+2\times k'+2 \\ &= 2\big(k+k'+1\big) \end{aligned}$$
On en déduit que $a+b$ est pair.
- Montrons que le produit de deux entiers impairs est impair :
$$\begin{aligned} a\times b &= \big(2\times k+1\big)\big(2\times k'+1\big) \\ &= 4\times k\times k'+2\times k+2\times k'+1 \\ &= 2\big(2\times k\times k'+k+k'\big)+1 \end{aligned}$$
On en déduit que $a\times b$ est impair.

D. Entiers premiers :

Définition : un entier positif est dit premier s'il admet exactement 2 diviseurs *(1 et lui-même)*

Exemple : Voici la liste des entiers premiers inférieur ou égal à 100 :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ;
23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ;
59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ;
97

E. Décomposition en produit de facteurs premirs :

Définition - proposition : soit a un entier non-nul. Il existe une suite d'entiers premiers p_1, $_2$, …,p_n et d'exposant entier k_1, k_2, …, k_n tels que :
$$a={p_1}^{k_1}\times {p_2}^{k_2}\times\cdots\times {p_n}^{k_n}$$
Cette écriture du nombre a s'appelle la **décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier a.**

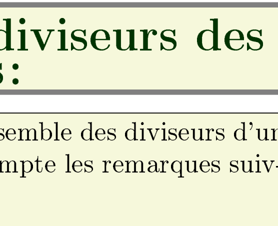
Algorithme :
Pour obtenir la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier a, on procède comme suit :

- on cherche un diviseur b de a parmi les entiers premiers connus.
- on effectue la division $^a\!/_b$ qu'on note k
- si $k=1$, l'algorithme est fini, sinon on recommence l'algorithme avec l'entier k

Voici quelques illustrations de cette algorithme pour la décomposition en produit d'entiers premiers du nombre 56 :

$$\begin{aligned} 84 &= 2\times 42 \\ &= 2\times 2\times 21 \\ &= 2\times 2\times 3\times 7 \\ &= 2^2\times 3\times 7 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$



F. Ensemble des diviseurs des entiers :

Remarque : pour déterminer l'ensemble des diviseurs d'un nombre nous devons prendre en compte les remarques suivantes :

- un nombre premier n'appartenant pas à la décomposition du nombre a ne peut être un diviseur : voir illustration 1, l'entier 7 ne peut être un diviseur de 360.
- pour un entier premier p présent dans la décomposition de a. L'entier p^k n'est pas un diviseur de a si l'exposant k est plus grand que l'exposant de l'entier p dans la décomposition de a : voir illustration 2, l'entier 2^7 ne peut être un diviseur de 360
- Un entier b est diviseur de a si les décompositions de a et de b utilisent les mêmes entiers premiers et si, en comparant les exposant de chaque entier les exposants de b sont inférieurs ou égal à ceux de a : voir illustration 3 : les entiers 2^2 et 3 sont des diviseurs de 360 et leur produit aussi.

Voici quelques illustrations de ces points lorsqu'on cherche des diviseurs du nombre 360 où $360=2^3\times 3^2\times 5$

Illustration 1
$$\frac{360}{7}=\frac{2^3\times 3^2\times 5}{7}$$

Illustration 2
$$\frac{360}{2^7\times 5}=\frac{2^{\cancel{3}}\times 3^2\times\cancel{5}}{2^{\cancel{7}}\times\cancel{5}}=\frac{3^2}{2^4}$$

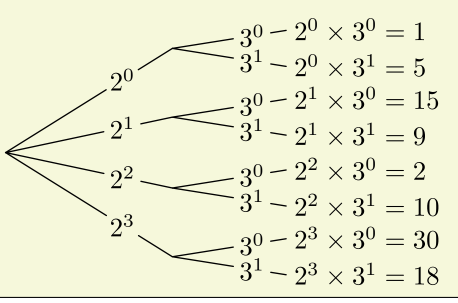
Illustration 3
$$\frac{360}{2^2\times 2}=\frac{2^{\cancel{3}}\times 3^{\cancel{2}}\times 5}{\cancel{2^2}\times\cancel{3}}=2\times 3\times 5$$

Exemple : l'entier 24 admet la décomposition en produit de facteurs premiers : $24=2^3\times 3$
D'après la remarque précédente, un entier est un diviseur de 24, s'il utilise les nombres premiers 2 et 3 avec des exposants :

- inférieur ou égal à 3 pour l'entier premier 2
- inférieur ou égal à 1 pour l'entier premier 3

On peut déterminer l'ensemble des diviseurs de 24 :

- par la méthode **exhaustive** :
$2 \;;\; 2^2 \;;\; 2^2$
$3 \;;\; 2\times 3 \;;\; 2^2\times 3 \;;\; 2^3\times 3$
Sans oublier l'entier 1.
- par la méthode **exhaustive basé sur l'écriture avec les puissances** :
$2^0\times 3^0 \;;\; 2^1\times 3^0 \;;\; 2^2\times 3^0 \;;\; 2^3\times 3^0$
$2^0\times 3^1 \;;\; 2^1\times 3^1 \;;\; 2^2\times 3^1 \;;\; 2^3\times 3^1$
- par la méthode **de l'arbre de choix** :



Exemple : l'entier 360 admet la décomposition en produit de facteurs premiers : $360=2^3\times 3\times 5$

Voici l'arbre de choix qui permet de déterminer l'ensemble des diviseurs de l'entier 360 :y