

Proposition : Soit ABC un triangle. Son aire $\mathcal{A}$ a pour valeur :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \widehat{BAC}$$

Preuve :

On étudiera les deux cas suivants :

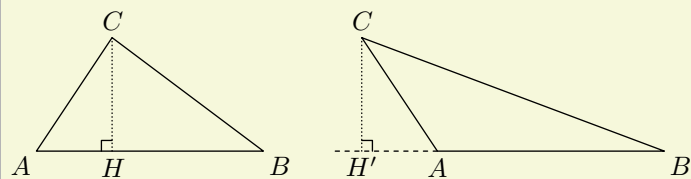


Figure 1

Figure 2

• **l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu :** (figure 1)

Dans le triangle ACH rectangle en H , on a la relation trigonométrique :

$$\sin \widehat{HAC} = \frac{CH}{AC}$$

$$CH = AC \times \sin \widehat{HAC}$$

On en déduit l'aire du triangle ABC :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \times AB \times CH = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \widehat{HAC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \widehat{A} \end{aligned}$$

• **l'angle $\widehat{BAC}$ est obtu :** (figure 2)

Dans le triangle ACH' rectangle en H' , on a la relation trigonométrique :

$$\sin \widehat{H'AC} = \frac{CH'}{AC}$$

$$CH' = AC \times \sin \widehat{H'AC}$$

On en déduit l'aire du triangle ABC :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \times AB \times CH' = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \widehat{H'AC} \\ &= \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{HAC} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \widehat{HAC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \widehat{A} \end{aligned}$$

Proposition : Soit ABC un triangle. On a les égalités :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

Preuve :

En utilisant la formule de l'aire avec les trois angles de ce triangle, on a :

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \widehat{C} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \widehat{A}$$

$$a \cdot b \cdot \sin \widehat{C} = a \cdot c \cdot \sin \widehat{B} = b \cdot c \cdot \sin \widehat{A}$$

$$\frac{a \cdot b \cdot \sin \widehat{C}}{a \cdot b \cdot c} = \frac{a \cdot c \cdot \sin \widehat{B}}{a \cdot b \cdot c} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \widehat{A}}{a \cdot b \cdot c}$$

$$\frac{\sin \widehat{C}}{c} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{A}}{a}$$