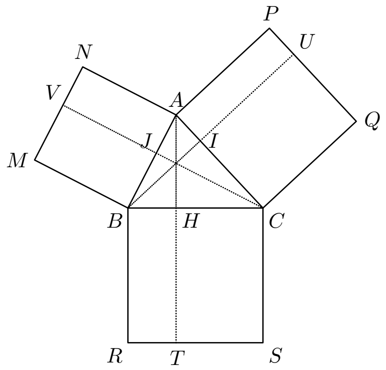
Dans le cas d'un triangle acutangle

a. On construit extérieurement au triangle trois carrés ayant chacun pour côté un des côtés du triangle.



b. On montre que les triangles MBJ et MBC ont la même aire : car ils partagent la même base $[MB]$ et que leurs hauteurs issues de J et de C ont même longueur :

Figure 1

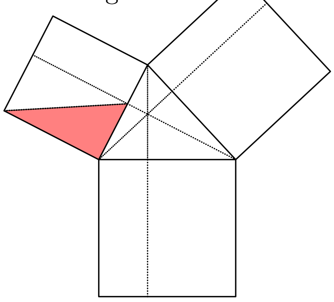
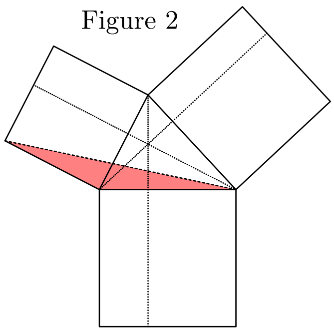


Figure 2



c. Les triangles MBC et ABR ont même aire car ces deux triangles sont symétriques l'un de l'autre par la rotation de centre B et d'angle 90^o *(fig. 2 et 3)*.
On montre que les triangles ABR et HBR ont même aire car ils partagent la même base $[BR]$ et leurs hauteurs ont des hauteurs de même mesure.

Figure 3

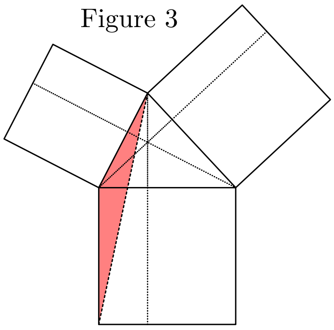
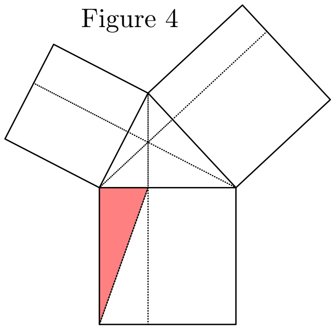


Figure 4



On vient de montrer que les rectangle $BRTH$ et $MBJV$ ont la même aire.

d. Les triangles QIC et QBC ont la même aire car ils partagent la même base $[CQ]$ et leurs hauteurs ont la même longueurs :

Figure 5

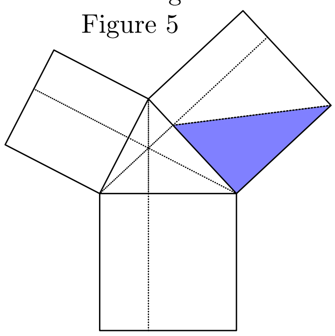
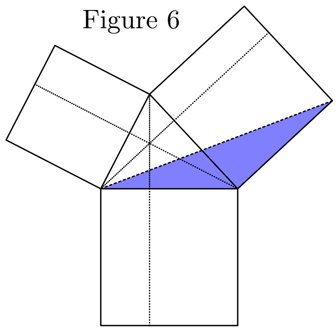


Figure 6



e. Les triangles BCQ et SCA ont même aire car ils sont symétriques par la rotation de centre C et d'angle 90^o *(fig. 6 et 7)*.
Les triangles ACS et HCS ont même aire car ils partagent la même base $[CS]$ et leurs hauteurs ont même longueur.

Figure 7

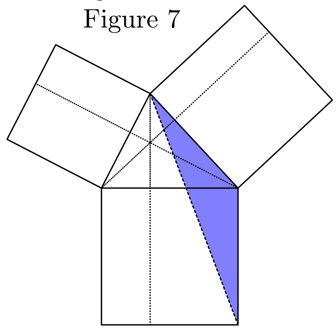
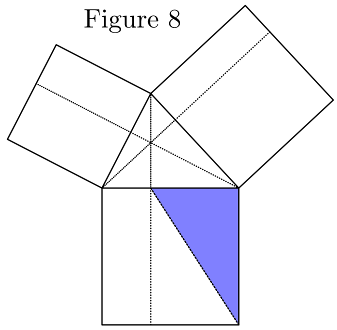


Figure 8



On vient de montrer que les rectangles $HTSC$ et $CQUJ$ ont la même aire.

f. Les résultats précédents rassemblés dans la figure 10 montrent la relation :

$BC^2 = \left(BA^2 - \mathcal{R}_1\right) + \left(CA^2 - \mathcal{R}_2\right)$

Figure 10

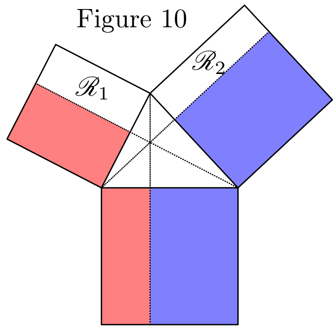
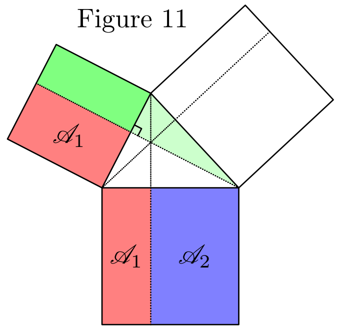


Figure 11



Déterminons l'aire $\mathcal{R}_1$ à l'aide de la figure 11. L'aire $\mathcal{R}_1$ est l'aire du rectangle $AJVN$:

$\mathcal{R}_1 = AN \times AJ$

Dans le triangle AJC rectangle en J, on a la relation trigonométrique :

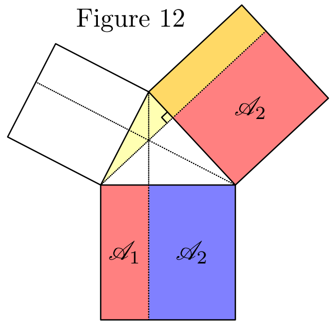
$\cos\widehat{JAC} = \dfrac{AJ}{AC}$ On en déduit :

$AJ = AC \times \cos\widehat{JAC}$

$\mathcal{R}_1 = AN \times AJ = AB \times AC \times \cos\widehat{JAC}$

g. Déterminons l'aire $\mathcal{R}_2$:

Figure 12



L'aire $\mathcal{R}_2$ est l'aire du rectangle $AJUP$:

$\mathcal{R}_2 = AP \times AI$

Dans le triangle rectangle ABI rectangle en I, on a le rapport trigonométrique :

$\cos\widehat{BAI} = \dfrac{AI}{AB}$

$AI = AB \times \cos\widehat{BAI}$

On en déduit :

$\mathcal{R}_2 = AP \times AJ = AC \times AB \times \cos BAI$

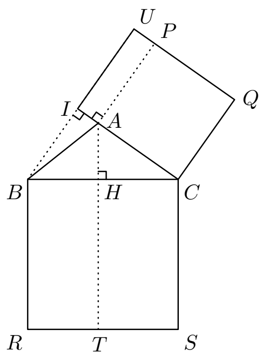
On en déduit la relation :

$$BC^2 = \left(BA^2 - \mathcal{R}_1\right) + \left(CA^2 - \mathcal{R}_2\right)$$
$$= BA^2 - AB\times AC\times \cos\widehat{JAC} + CA^2 - AC\times AB\times \cos BAI$$
$$= BA^2 + CA^2 - 2\times AC\times AB\times \cos A$$

Dans le cas d'un triangle obtusangle

- **Première partie :**

  A partir du triangle ABC, on a construit la configuration suivante :



a. Comme précédemment, par des considérations équivalentes, on montre successivement que les triangles IQC, BQC, ACS et HCS sont de même aire.

Figure 1

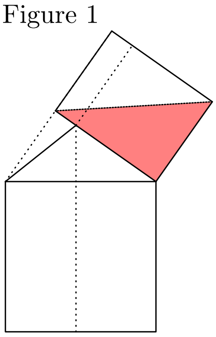


Figure 2

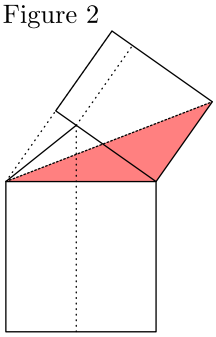


Figure 3

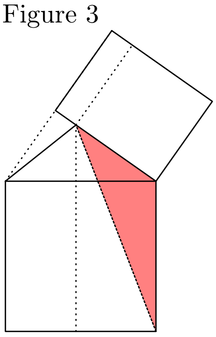
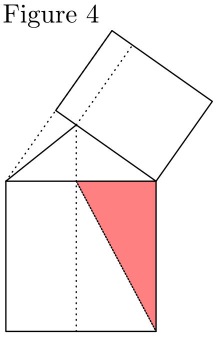
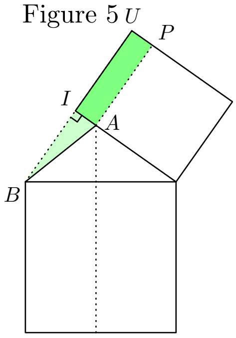


Figure 4



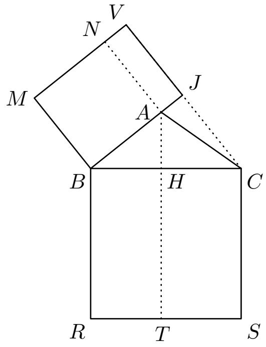
b. Par un raisonnement similaire à la démonstration précédente, on montre que le rectangle $UPAI$ a pour aire : $\mathcal{R}_1 = -AB\times IU\times \cos\widehat{BAC}$

Figure 5



- **Seconde partie :**

  A partir du triangle ABC, on construit la configuration suivante :



a. Comme précédemment, par des considérations équivalentes, on montre successivement qu les triangles JMA, MBC, ABR, BHR sont de même aire.

Figure 1

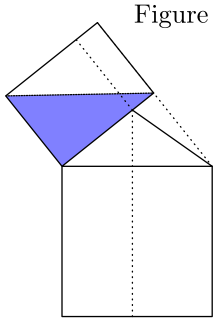


Figure 2

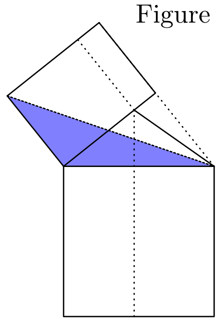


Figure 3

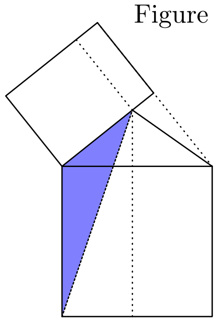
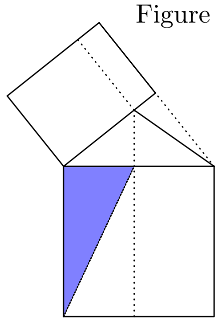
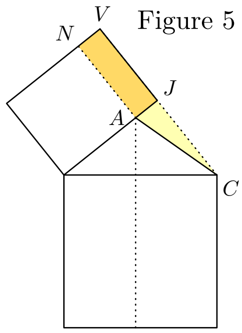


Figure 4



b. Par un raisonnement similaire à la démonstration précédente, on montre que le rectangle $MBJV$ a pour aire : $\mathcal{R}_2 = -AC\times JV\times \cos\widehat{BAC}$

Figure 5



On vient d'établir que :

$$BC^2 = \left(AB^2 + \mathcal{R}_1\right) + \left(AC^2 + \mathcal{R}_2\right)$$
$$= AB^2 - AB\times IU\times \cos\widehat{BAC} + AC^2 - AC\times JV\times \cos BAC$$
$$= AB^2 - AB\times AC\times \cos\widehat{BAC} + AC^2 - AC\times AB\times \cos BAC$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times \cos\widehat{BAC}$$

