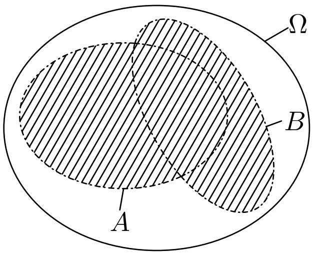
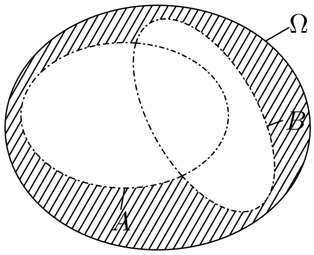
Correction 1

1. Voici la représentation de ces deux ensembles :



$A\cup B$



$\overline{A}\cap\overline{B}$

2. a. Considérons un évènement élémentaire ω tel que $\omega\in\overline{A\cup B}$.
Ainsi, on a : $\omega\notin A\cup B$
- De l'inclusion $A\subset A\cup B$, on a :
$\omega\notin A\cup B \implies \omega\notin A$
- De l'inclusion $B\subset A\cup B$, on a :
$\omega\notin A\cup B \implies \omega\notin B$

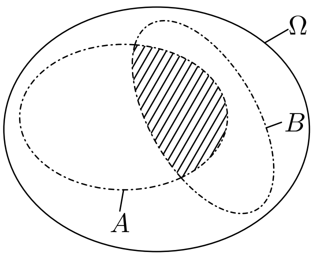
On en déduit l'implication :
$\omega\in\overline{A\cup B} \implies \omega\in\overline{A}\cap\overline{B}$

b. Prenons un élément ω de l'évènement $\overline{A}\cap\overline{B}$.
Effectuons un raisonnement par l'absurde en supposant que ω appartienne à l'ensemble $A\cup B$.
De l'appartenant $\omega\in A\cup B$, effectuons le raisonnement par disjonction de cas :
- Soit $\omega\in A$. Mais comme $\omega\in\overline{A}\cap\overline{B}$, on a en particulier $\omega\in\overline{A}$: ce qui est absurde.
- Soit $\omega\in B$. Mais comme $\omega\in\overline{A}\cap\overline{B}$, on a en particulier $\omega\in\overline{B}$: ce qui est absurde.

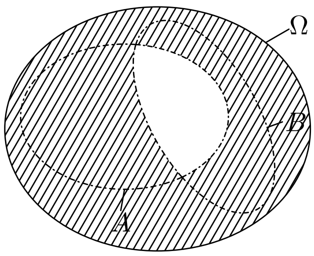
Ainsi, on vient d'établir que :
$\omega\notin A\cup B \implies \omega\in\overline{A\cup B}$

Correction 2

1. Voici la représentation de ces deux ensembles :



$A\cap B$;



$\overline{A}\cup\overline{B}$

2. a. On considère les trois ensembles $\overline{A\cup B}$, $A\backslash B$ et $B\backslash A$ deux à deux disjoints et formant une partition de $\overline{A\cap B}$:
$\overline{A\cap B} = \big(\overline{A\cup B}\big)\cup\big(A\backslash B\big)\cup\big(B\backslash A\big)$

Ainsi, pour $\omega\in\overline{A\cap B}$ et par disjonction de cas, on a :
- $\omega\in\overline{A\cup B} \implies \omega\notin A\cup B$
$\implies \omega\notin A\,(en\ particulier) \implies \omega\in\overline{A}\cup\overline{B}$
- $\omega\in A\backslash B \implies \omega\notin B \implies \omega\in\overline{A}\cup\overline{B}$
- $\omega\in B\backslash A \implies \omega\notin A \implies \omega\in\overline{A}\cup\overline{B}$

On en déduit l'implication :
$\omega\in\overline{A\cap B} \implies \omega\in\overline{A}\cup\overline{B}$

b. Prenons un élément ω de l'évènement $\overline{A}\cup\overline{B}$.
Effectuons un raisonnement par l'absurde en supposant que ω appartienne à l'ensemble $A\cap B$.
De l'appartenant $\omega\in\overline{A}\cup\overline{B}$, effectuons le raisonnement par disjonction de cas :
- Soit $\omega\in\overline{A}$. Mais comme $\omega\in A\cap B$, on a en particulier $\omega\in A$: ce qui est absurde.
- Soit $\omega\in\overline{B}$. Mais comme $\omega\in A\cap B$, on a en particulier $\omega\in B$: ce qui est absurde.

Ainsi, on vient d'établir que : $\omega\notin\overline{A\cap B}$.
Ce qui est donc absurde. On vient de montrer que :
$\omega\in\overline{A}\cup\overline{B} \implies \omega\in\overline{A\cap B}$