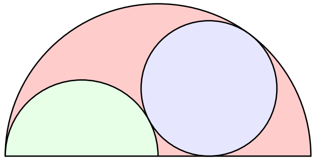
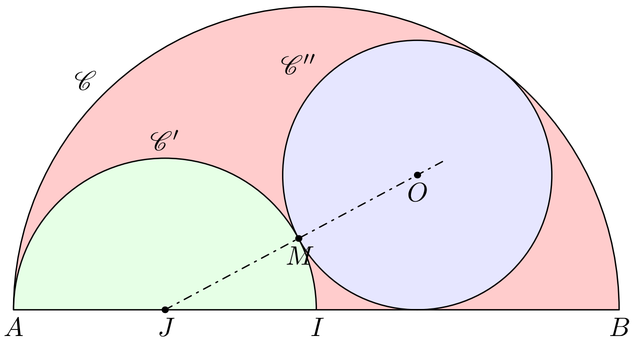
Sangaku - partie 4



On souhaite reproduire la Sangaku ci-contre représentant un cercle tangent à deux demi-cercles et tangent à un diamètre du plus grand demi-cercle.

Voici une représentation de la figure avec quelques points importants de celle-ci :

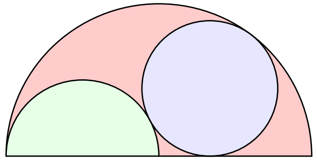


et voici quelques propriétés de cette configuration :

- Le demi-cercle $\mathscr{C}$ a pour diamètre le segment $[AB]$.
- Le point I est le milieu du segment $[AB]$.
- Le demi-cercle $\mathscr{C}'$ a pour diamètre le segment $[AI]$.
- Le point J est le centre du demi-cercle $\mathscr{C}'$.
- Le point M est un point libre du cercle $\mathscr{C}'$.
- Le point O est un point libre de la demi-droite $[JM)$.
- Le cercle $\mathscr{C}''$ a pour centre O et passe par le point M.

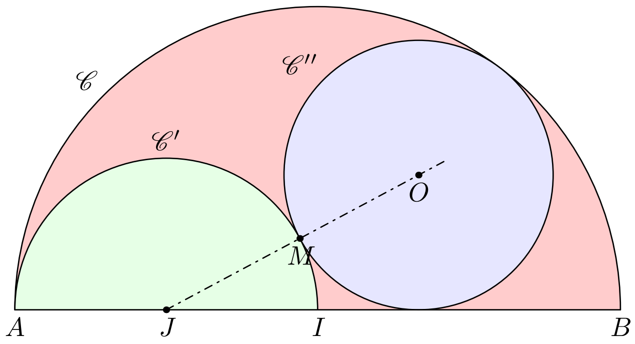
Ajuster la position des points M et O pour obtenir la figure présentée.

Sangaku - partie 4



On souhaite reproduire la Sangaku ci-contre représentant un cercle tangent à deux demi-cercles et tangent à un diamètre du plus grand demi-cercle.

Voici une représentation de la figure avec quelques points importants de celle-ci :

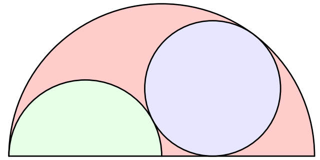


et voici quelques propriétés de cette configuration :

- Le demi-cercle $\mathscr{C}$ a pour diamètre le segment $[AB]$.
- Le point I est le milieu du segment $[AB]$.
- Le demi-cercle $\mathscr{C}'$ a pour diamètre le segment $[AI]$.
- Le point J est le centre du demi-cercle $\mathscr{C}'$.
- Le point M est un point libre du cercle $\mathscr{C}'$.
- Le point O est un point libre de la demi-droite $[JM)$.
- Le cercle $\mathscr{C}''$ a pour centre O et passe par le point M.

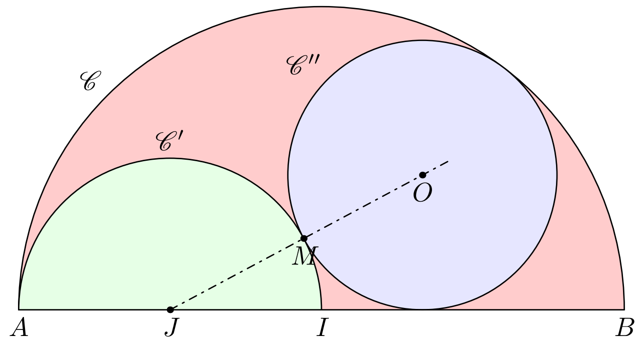
Ajuster la position des points M et O pour obtenir la figure présentée.

Sangaku - partie 4



On souhaite reproduire la Sangaku ci-contre représentant un cercle tangent à deux demi-cercles et tangent à un diamètre du plus grand demi-cercle.

Voici une représentation de la figure avec quelques points importants de celle-ci :

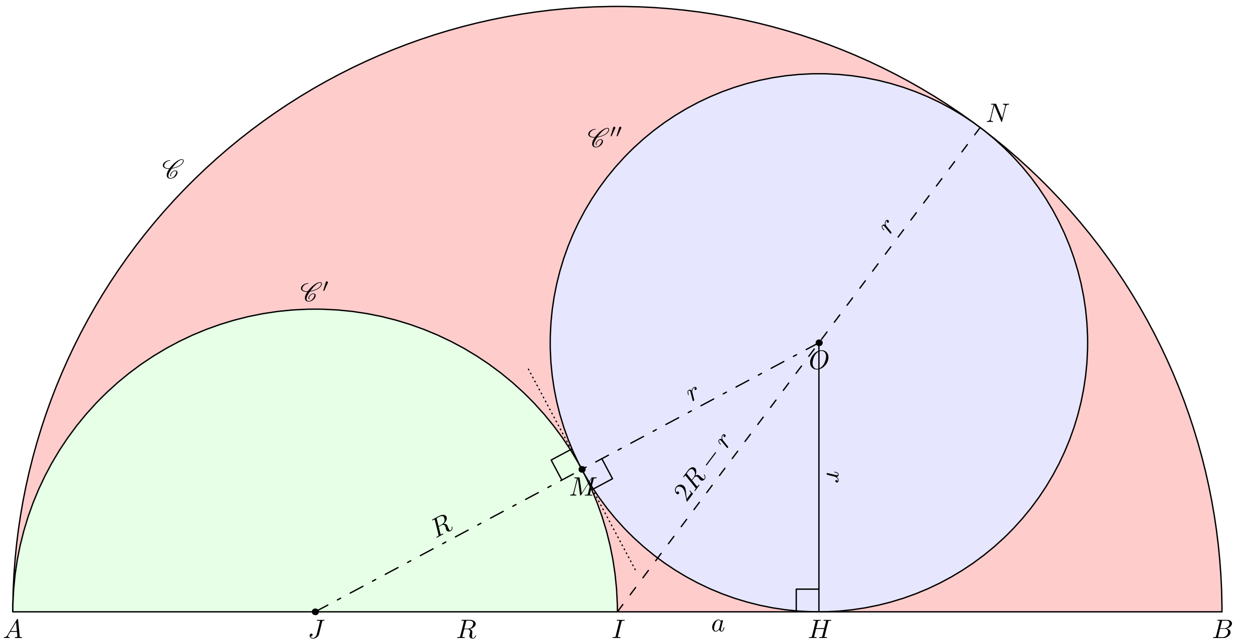


et voici quelques propriétés de cette configuration :

- Le demi-cercle $\mathscr{C}$ a pour diamètre le segment $[AB]$.
- Le point I est le milieu du segment $[AB]$.
- Le demi-cercle $\mathscr{C}'$ a pour diamètre le segment $[AI]$.
- Le point J est le centre du demi-cercle $\mathscr{C}'$.
- Le point M est un point libre du cercle $\mathscr{C}'$.
- Le point O est un point libre de la demi-droite $[JM)$.
- Le cercle $\mathscr{C}''$ a pour centre O et passe par le point M.

Ajuster la position des points M et O pour obtenir la figure présentée.

Sangaku - Partie 4 - Fiche professeur



Pour construire la figure, on utilise : $a = \dfrac{2}{3}\cdot R \quad ; \quad r = \dfrac{8}{9}\cdot R$

On note R le rayon du cercle $\mathscr{C}'$. Voici quelques remarques sur la figure ci-dessus :

- $[JM]$ et $[JI]$ sont deux rayons du cercle $\mathscr{C}'$.
- $[ON]$, $[OM]$ et $[OH]$ sont des rayons du cercle $\mathscr{C}''$.
- Les points J, M et O sont alignés.
- Le cercle $\mathscr{C}$ a pour rayon $[IA]$ et $[IN]$ qui ont pour mesure $2\cdot R$. On en déduit la mesure du segment $[IO]$.

Utilisons l'angle droit $\widehat{JHO}$ par deux fois :

- Dans le triangle JHO rectangle en H, on a la relation :

$$\begin{aligned} JO^2 &= JH^2 + HO^2 \\ \big(R+a\big)^2 + r^2 &= \big(R+r\big)^2 \\ R^2 + 2\cdot R\cdot a + a^2 + r^2 &= R^2 + 2\cdot R\cdot r + r^2 \\ 2\cdot R\cdot a + a^2 &= 2\cdot R\cdot r \\ a^2 &= 2\cdot R\cdot r - 2\cdot R\cdot a \end{aligned}$$

- Dans le triangle IOH rectangle en H, on a la relation :

$$\begin{aligned} IH^2 + OH^2 &= IO^2 \\ a^2 + r^2 &= \big(2\cdot R - r\big)^2 \\ a^2 + r^2 &= 4\cdot R^2 - 4\cdot R\cdot r + r^2 \\ a^2 &= 4\cdot R^2 - 4\cdot R\cdot r \end{aligned}$$

De ces deux égalités, on obtient la relation :

$$\begin{aligned} 2\cdot R\cdot r - 2\cdot R\cdot a &= 4\cdot R^2 - 4\cdot R\cdot r \\ R\cdot\big(2\cdot r - 2\cdot a\big) &= R\cdot\big(4\cdot R - 4\cdot r\big) \end{aligned}$$

La longueur R étant non-nulle :

$$\begin{aligned} 2\cdot r - 2\cdot a &= 4\cdot R - 4\cdot r \\ -2\cdot a &= 4\cdot R - 6\cdot r \\ a &= 3\cdot r - 2\cdot R \end{aligned}$$

Substituons cette valeur dans une des équations précédente :

$$\begin{aligned} a^2 &= 4\cdot R^2 - 4\cdot R\cdot r \\ \big(3\cdot r - 2\cdot R\big)^2 &= 4\cdot R^2 - 4\cdot R\cdot r \\ 9\cdot r^2 - 12\cdot R\cdot r + 4\cdot R^2 &= 4\cdot R^2 - 4\cdot R\cdot r \\ 9\cdot r^2 - 12\cdot R\cdot r &= -4\cdot R\cdot r \\ 9\cdot r^2 - 8\cdot R\cdot r &= 0 \\ r\cdot\big(9\cdot r - 8\cdot R\big) &= 0 \end{aligned}$$

Le nombre r étant une longueur, elle est non-nulle :

$$\begin{aligned} 9\cdot r - 8\cdot R &= 0 \\ 9\cdot r &= 8\cdot R \\ r &= \frac{8}{9}\cdot R \end{aligned}$$

Déterminons la valeur de a :

$$\begin{aligned} a &= 3\cdot r - 2\cdot R = 3\times\frac{8}{9}\cdot R - 2\cdot R = \frac{24}{9}\cdot R - 2\cdot R \\ &= \frac{24-18}{9}\cdot R = \frac{6}{9}\cdot R = \frac{2}{3}\cdot R \end{aligned}$$