Exercice

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentation de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. Déterminer l'équation réduire la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
3. Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Correction

1. $f'(x) = 3{\cdot}x^2 - 5\times\big(2{\cdot}x\big) + 7\times1 - 0 = 3x^2 - 10x + 7$
2. On a les valeurs :
   - $f(2) = 2^3 - 5\times2^2 + 7\times2 - 2 = 8 - 5\times4 + 14 - 2$
     $= 8 - 20 + 14 - 2 = 0$
   - $f'(2) = 3\times2^2 - 10\times2 + 7 = 3\times4 - 20 + 7$
     $= 12 - 20 + 7 = -1$

   Ainsi, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation réduite :
   $$y = f'(2){\cdot}\big(x-2\big) + f(2)$$
   $$y = -1\big(x-2\big) + 0$$
   $$y = -x + 2$$
3. La fonction f' est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
   $\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-10)^2 - 4\times3\times7 = 100 - 84 = 16$
   On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

   Le discrimimant étant strictement positif, cette fonction admet les deux racines :

   $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-10)-4}{2\times3} = \frac{10-4}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

   $$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-10)+4}{2\times3} = \frac{10+4}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{2}$$

   Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   On en déduit les variations de la fonction f :
   - La fonction f est croissante sur les intervalles $\big]-\infty\,;1\big[$ et $\Big]\frac{7}{2}\,;+\infty\Big[$
   - La fonction f est décroissante sur l'intervalle $\Big]1\,;\frac{7}{2}\Big[$.

Exercice

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentation de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. Déterminer l'équation réduire la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
3. Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Correction

1. $f'(x) = 3{\cdot}x^2 - 5\times\big(2{\cdot}x\big) + 7\times1 - 0 = 3x^2 - 10x + 7$
2. On a les valeurs :
   - $f(2) = 2^3 - 5\times2^2 + 7\times2 - 2 = 8 - 5\times4 + 14 - 2$
     $= 8 - 20 + 14 - 2 = 0$
   - $f'(2) = 3\times2^2 - 10\times2 + 7 = 3\times4 - 20 + 7$
     $= 12 - 20 + 7 = -1$

   Ainsi, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation réduite :
   $$y = f'(2){\cdot}\big(x-2\big) + f(2)$$
   $$y = -1\big(x-2\big) + 0$$
   $$y = -x + 2$$
3. La fonction f' est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
   $\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-10)^2 - 4\times3\times7 = 100 - 84 = 16$
   On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

   Le discrimimant étant strictement positif, cette fonction admet les deux racines :

   $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-10)-4}{2\times3} = \frac{10-4}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

   $$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-10)+4}{2\times3} = \frac{10+4}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{2}$$

   Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   On en déduit les variations de la fonction f :
   - La fonction f est croissante sur les intervalles $\big]-\infty\,;1\big[$ et $\Big]\frac{7}{2}\,;+\infty\Big[$
   - La fonction f est décroissante sur l'intervalle $\Big]1\,;\frac{7}{2}\Big[$.

 CC BY-NC