Proposition :

Considérons l'équation $a{\cdot}z^2+b{\cdot}z+c=0$ où a, b et c sont des nombres réels et où $a\neq 0$

On définit le discriminant Δ du polynôme du second degré par :

$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c$

Cette équation admet toujours dans $\mathbb{C}$ des solutions ; plus précisement :

- Si $\boldsymbol{\Delta>0}$, l'équation admet deux solutions :
  $$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} \quad ; \quad z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$$
  Ces deux solutions sont réelles.
- Si $\boldsymbol{\Delta=0}$, l'équation admet une unique solution :
  $$z=-\frac{b}{2{\cdot}a}$$
  Cette solution est réelle.
- Si $\boldsymbol{\Delta<0}$, l'équation admet deux solutions :
  $$z_1=\frac{-b-i{\cdot}\sqrt{-\Delta}}{2{\cdot}a} \quad ; \quad z_2=\frac{-b+i{\cdot}\sqrt{-\Delta}}{2{\cdot}a}$$
  Ces deux solutions sont complexes et conjuguées.

Preuve :

On a la factorisation suivante :

$$a{\cdot}z^2+b{\cdot}z+c=a{\cdot}\Big(z^2+\frac{b}{a}{\cdot}z+\frac{c}{a}\Big)=a{\cdot}\Big[\Big(z+\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{b^2}{4{\cdot}a^2}+\frac{c}{a}\Big]$$
$$=a{\cdot}\Big[\Big(z+\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a^2}\Big]=a{\cdot}\Big[\Big(z+\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{\Delta}{4{\cdot}a^2}\Big]$$

- $\boldsymbol{\Delta>0}$: on peut écrire $\Delta=\big(\sqrt{\Delta}\big)^2$
  On a les transformations algébriques suivantes :
  $$a{\cdot}z^2+b{\cdot}z+c=a{\cdot}\Big[\Big(z+\frac{b}{2a}\Big)^2-\Big(\frac{\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)^2\Big]=a{\cdot}\Big(z+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)\Big(z+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)$$
  $$=a{\cdot}\Big(z+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)\Big(z+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)=a{\cdot}\Big(z-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)\Big(z-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)$$
  Ainsi, l'équation a pour solutions les deux nombres réels :
  $$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} \quad ; \quad z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$$
- $\boldsymbol{\Delta=0}$
  $$a{\cdot}z^2+b{\cdot}z+c=a{\cdot}\Big[\Big(z+\frac{b}{2a}\Big)^2-\Big(\frac{\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)^2\Big]=a{\cdot}\Big(z+\frac{b}{2a}\Big)^2$$
  Cette équation s'annule pour $z=-\dfrac{b}{2a}$
- $\boldsymbol{\Delta<0}$: on peut écrire : $-\Delta=\big(\sqrt{-\Delta}\big)^2$
  On a les transformations algébriques suivantes :
  $$a{\cdot}z^2+b{\cdot}z+c=a{\cdot}\Big[\Big(z+\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{i^2{\cdot}(-\Delta)}{4{\cdot}a^2}\Big]=a{\cdot}\Big[\Big(z+\frac{b}{2a}\Big)^2-\frac{i^2{\cdot}(\sqrt{-\Delta})^2}{(2{\cdot}a)^2}\Big]$$
  $$=a{\cdot}\Big[\Big(z+\frac{b}{2a}\Big)^2-\Big(\frac{i{\cdot}\sqrt{-\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)^2\Big]=a{\cdot}\Big(z+\frac{b}{2a}+\frac{i{\cdot}\sqrt{-\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)\Big(z+\frac{b}{2a}-\frac{i{\cdot}\sqrt{-\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)$$
  $$=a{\cdot}\Big(z+\frac{b+i{\cdot}\sqrt{-\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)\Big(z+\frac{b-i{\cdot}\sqrt{-\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)=a{\cdot}\Big(z-\frac{-b-i{\cdot}\sqrt{-\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)\Big(z-\frac{-b+i{\cdot}\sqrt{-\Delta}}{2{\cdot}a}\Big)$$
  Ainsi, l'équation admet les deux solutions suivantes :
  $$z_1=\frac{-b-i{\cdot}\sqrt{-\Delta}}{2{\cdot}a} \quad ; \quad z_2=\frac{-b+i{\cdot}\sqrt{-\Delta}}{2{\cdot}a}$$

