Proposition :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $\big[a\,;b\big]$.

- Si f est positive sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- Si f est négative sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$

Démonstration :

La fonction f étant continue, elle admet une primitive qu'on notera F. La démonstration de cette propriété se base sur le sens de variation de la fonction F puisqu'on connait le signe de f qui est sa dérivée :

- Supposons que f est positive, alors la fonction F est croissante. On a la comparaison suivante :
  $$b \geqslant a$$
  Puisque la fonction F est croissante :
  $$F(b) \geqslant F(a)$$
  $$F(b) - F(a) \geqslant 0$$
  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$
- Supposons que f est négative, alors la fonction F est décroissante. On a la comparaison suivante :
  $$b \geqslant a$$
  Puisque la fonction F est décroissante :
  $$F(b) \leqslant F(a)$$
  $$F(b) - F(a) \leqslant 0$$
  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

Corollaire :

Soit f et g deux fonctions continues sur $\big[a\,;b\big]$ tels que :

$f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in \big[a\,;b\big]$

Alors, on a la comparaison :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve :

Puisque que pour tout $x \in \big[a\,;b\big]$, on a la comparaison :
$$f(x) \leqslant g(x)$$
On en déduit les inégalités suivantes :
$$f(x) - g(x) \leqslant 0$$
La fonction $x \longmapsto f(x) - g(x)$ est négative, d'après la proposition précédente, on a :
$$\int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$
Par utilisation de la linéarité de l'intégrale, on obtient :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Proposition :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $\big[a\,;b\big]$.

- Si f est positive sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- Si f est négative sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$

Démonstration :

La fonction f étant continue, elle admet une primitive qu'on notera F. La démonstration de cette propriété se base sur le sens de variation de la fonction F puisqu'on connait le signe de f qui est sa dérivée :

- Supposons que f est positive, alors la fonction F est croissante. On a la comparaison suivante :
  $$b \geqslant a$$
  Puisque la fonction F est croissante :
  $$F(b) \geqslant F(a)$$
  $$F(b) - F(a) \geqslant 0$$
  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$
- Supposons que f est négative, alors la fonction F est décroissante. On a la comparaison suivante :
  $$b \geqslant a$$
  Puisque la fonction F est décroissante :
  $$F(b) \leqslant F(a)$$
  $$F(b) - F(a) \leqslant 0$$
  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

Corollaire :

Soit f et g deux fonctions continues sur $\big[a\,;b\big]$ tels que :

$f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in \big[a\,;b\big]$

Alors, on a la comparaison :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve :

Puisque que pour tout $x \in \big[a\,;b\big]$, on a la comparaison :
$$f(x) \leqslant g(x)$$
On en déduit les inégalités suivantes :
$$f(x) - g(x) \leqslant 0$$
La fonction $x \longmapsto f(x) - g(x)$ est négative, d'après la proposition précédente, on a :
$$\int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$
Par utilisation de la linéarité de l'intégrale, on obtient :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Proposition : *(Relation de Chasles)*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois nombres réels appartenant à I. On a l'égalité :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration :

La fonction f est une fonction continue, elle admet donc une primitive qu'on notera F. Par définition de l'intégrale, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad = \big[F(b) - F(a)\big] + \big[F(c) - F(b)\big] \\
&\quad = F(c) + \big[F(b) - F(b)\big] - F(a) = F(c) - F(a) \\
&\quad = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Corollaire :

Soit f une fonction continue sur $\big[a\,;b\big]$, on a l'égalité :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve :

D'après la relation de Chasles, on a l'égalité :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x) = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x) = F(a) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x) = 0$$

On en déduit l'égalité :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Proposition : *(Relation de Chasles)*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois nombres réels appartenant à I. On a l'égalité :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration :

La fonction f est une fonction continue, elle admet donc une primitive qu'on notera F. Par définition de l'intégrale, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad = \big[F(b) - F(a)\big] + \big[F(c) - F(b)\big] \\
&\quad = F(c) + \big[F(b) - F(b)\big] - F(a) = F(c) - F(a) \\
&\quad = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Corollaire :

Soit f une fonction continue sur $\big[a\,;b\big]$, on a l'égalité :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve :

D'après la relation de Chasles, on a l'égalité :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x) = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x) = F(a) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x) = 0$$

On en déduit l'égalité :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriété :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ et λ un nombre réel quelconque. On a les deux identités suivantes :

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x){+}g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda{\cdot}f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda{\cdot}\Big(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big)$

Ces deux propriétés s'appellent "*propriétés de linéarité de l'intégrale*".

Démonstration :

Les fonctions f et g étant continues, elles admettent deux primitives notées respectivement F et G.

- Etablissons l'égalité :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x){+}g(x)\,\mathrm{d}x$$
  - $\displaystyle\int_a^b f(x)_d x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
$$\begin{aligned} &= \big[F(b)-F(a)\big]+\big[G(b)-G(a)\big] \\ &= F(b)+G(b)-F(a)-G(b) \\ &= \big(F{+}G\big)(b)-\big(F{+}G\big)(a) \\ &= \big[F{+}G\big]_a^b \end{aligned}$$
  - La formule de dérivation de l'addition permet d'écrire :
$$\big(F{+}G\big)'(x) = F'(x)+G'(x)$$
Par définition des primitives F et G :
$$= f(x)+g(x)$$
On en déduit :
$$\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)+G(x)\big]_a^b$$
- Etablissons l'égalité : $\displaystyle\int_a^b \lambda{\cdot}f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda{\cdot}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
  - $\displaystyle\lambda{\cdot}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda{\cdot}\big[f(x)\big]_a^b = \lambda{\cdot}\big[f(b)-f(a)\big]$
$$= \lambda{\cdot}f(b)-\lambda{\cdot}f(a)$$
  - λ étant un coefficient constant, on en déduit la dérivation suivante :
$\big(\lambda{\cdot}F\big)' = \lambda{\cdot}F' = \lambda{\cdot}f$
On en déduit que la fonction $(\lambda{\cdot}F)$ est la primitive de la fonction $(\lambda{\cdot}f)$.
$$\int_a^b \lambda{\cdot}f(x)\,\mathrm{d}x = \big[\lambda{\cdot}f(x)\big]_a^b = \lambda{\cdot}f(b)-\lambda{\cdot}f(a)$$

Propriété :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ et λ un nombre réel quelconque. On a les deux identités suivantes :

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x){+}g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda{\cdot}f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda{\cdot}\Big(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big)$

Ces deux propriétés s'appellent "*propriétés de linéarité de l'intégrale*".

Démonstration :

Les fonctions f et g étant continues, elles admettent deux primitives notées respectivement F et G.

- Etablissons l'égalité :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x){+}g(x)\,\mathrm{d}x$$
  - $\displaystyle\int_a^b f(x)_d x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
$$\begin{aligned} &= \big[F(b)-F(a)\big]+\big[G(b)-G(a)\big] \\ &= F(b)+G(b)-F(a)-G(b) \\ &= \big(F{+}G\big)(b)-\big(F{+}G\big)(a) \\ &= \big[F{+}G\big]_a^b \end{aligned}$$
  - La formule de dérivation de l'addition permet d'écrire :
$$\big(F{+}G\big)'(x) = F'(x)+G'(x)$$
Par définition des primitives F et G :
$$= f(x)+g(x)$$
On en déduit :
$$\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)+G(x)\big]_a^b$$
- Etablissons l'égalité : $\displaystyle\int_a^b \lambda{\cdot}f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda{\cdot}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
  - $\displaystyle\lambda{\cdot}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda{\cdot}\big[f(x)\big]_a^b = \lambda{\cdot}\big[f(b)-f(a)\big]$
$$= \lambda{\cdot}f(b)-\lambda{\cdot}f(a)$$
  - λ étant un coefficient constant, on en déduit la dérivation suivante :
$\big(\lambda{\cdot}F\big)' = \lambda{\cdot}F' = \lambda{\cdot}f$
On en déduit que la fonction $(\lambda{\cdot}F)$ est la primitive de la fonction $(\lambda{\cdot}f)$.
$$\int_a^b \lambda{\cdot}f(x)\,\mathrm{d}x = \big[\lambda{\cdot}f(x)\big]_a^b = \lambda{\cdot}f(b)-\lambda{\cdot}f(a)$$