Propriété :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ et λ un nombre réel quelconque. On a les deux identités suivantes :

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\cdot\Big(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big)$

Ces deux propriétés s'appellent "*propriétés de linéarité de l'intégrale*".

Démonstration :

Les fonctions f et g étant continues, elles admettent deux primitives notées respectivement F et G.

- Etablissons l'égalité :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x$$
  - $\displaystyle\int_a^b f(x)_d x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
$$= \big[F(b)-F(a)\big] + \big[G(b)-G(a)\big]$$
$$= F(b)+G(b)-F(a)-G(b)$$
$$= \big(F+G\big)(b) - \big(F+G\big)(a)$$
$$= \big[F+G\big]_a^b$$
  - La formule de dérivation de l'addition permet d'écrire :
$$\big(F+G\big)'(x) = F'(x)+G'(x)$$
Par définition des primitives F et G :
$$= f(x)+g(x)$$
On en déduit :
$$\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)+G(x)\big]_a^b$$
- Etablissons l'égalité : $\displaystyle\int_a^b \lambda\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
  - $\displaystyle\lambda\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\cdot\big[f(x)\big]_a^b = \lambda\cdot\big[f(b)-f(a)\big]$
$$= \lambda\cdot f(b) - \lambda\cdot f(a)$$
  - λ étant un coefficient constant, on en déduit la dérivation suivante :
$\big(\lambda\cdot F\big)' = \lambda\cdot F' = \lambda\cdot f$
On en déduit que la fonction $(\lambda\cdot F)$ est la primitive de la fonction $(\lambda\cdot f)$.
$$\int_a^b \lambda\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \big[\lambda\cdot f(x)\big]_a^b = \lambda\cdot f(b) - \lambda\cdot f(a)$$

Propriété :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ et λ un nombre réel quelconque. On a les deux identités suivantes :

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\cdot\Big(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big)$

Ces deux propriétés s'appellent "*propriétés de linéarité de l'intégrale*".

Démonstration :

Les fonctions f et g étant continues, elles admettent deux primitives notées respectivement F et G.

- Etablissons l'égalité :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x$$
  - $\displaystyle\int_a^b f(x)_d x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
$$= \big[F(b)-F(a)\big] + \big[G(b)-G(a)\big]$$
$$= F(b)+G(b)-F(a)-G(b)$$
$$= \big(F+G\big)(b) - \big(F+G\big)(a)$$
$$= \big[F+G\big]_a^b$$
  - La formule de dérivation de l'addition permet d'écrire :
$$\big(F+G\big)'(x) = F'(x)+G'(x)$$
Par définition des primitives F et G :
$$= f(x)+g(x)$$
On en déduit :
$$\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)+G(x)\big]_a^b$$
- Etablissons l'égalité : $\displaystyle\int_a^b \lambda\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
  - $\displaystyle\lambda\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\cdot\big[f(x)\big]_a^b = \lambda\cdot\big[f(b)-f(a)\big]$
$$= \lambda\cdot f(b) - \lambda\cdot f(a)$$
  - λ étant un coefficient constant, on en déduit la dérivation suivante :
$\big(\lambda\cdot F\big)' = \lambda\cdot F' = \lambda\cdot f$
On en déduit que la fonction $(\lambda\cdot F)$ est la primitive de la fonction $(\lambda\cdot f)$.
$$\int_a^b \lambda\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \big[\lambda\cdot f(x)\big]_a^b = \lambda\cdot f(b) - \lambda\cdot f(a)$$