Proposition : *(Relation de Chasles)*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois nombres réels appartenant à I. On a l'égalité :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration :

La fonction f est une fonction continue, elle admet donc une primitive qu'on notera F. Par définition de l'intégrale, on a les égalités suivantes :
$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad= \big[F(b)-F(a)\big] + \big[F(c)-F(b)\big] \\
&\quad= F(c) + \big[F(b)-F(b)\big] - F(a) = F(c) - F(a) \\
&\quad= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Corollaire :

Soit f une fonction continue sur $\big[a\,;b\big]$, on a l'égalité :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve :

D'après la relation de Chasles, on a l'égalité :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x) = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x) = F(a) - F(a)$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x) = 0$$
On en déduit l'égalité :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Proposition : *(Relation de Chasles)*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois nombres réels appartenant à I. On a l'égalité :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration :

La fonction f est une fonction continue, elle admet donc une primitive qu'on notera F. Par définition de l'intégrale, on a les égalités suivantes :
$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad= \big[F(b)-F(a)\big] + \big[F(c)-F(b)\big] \\
&\quad= F(c) + \big[F(b)-F(b)\big] - F(a) = F(c) - F(a) \\
&\quad= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Corollaire :

Soit f une fonction continue sur $\big[a\,;b\big]$, on a l'égalité :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve :

D'après la relation de Chasles, on a l'égalité :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x) = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x) = F(a) - F(a)$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x) = 0$$
On en déduit l'égalité :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$