

**Proposition :**

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels, pour tout entier naturel  $n$  non-nul, on a l'égalité suivante :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

**Démonstration :**

Pour  $n$  un entier naturel non-nul, on note  $\mathcal{P}_n$  la propriété suivante :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

Etablissons que cette propriété est vraie pour toute valeur de  $n \in \mathbb{N}^*$  à l'aide d'un raisonnement par récurrence :

- **Initialisation :**

Pour  $n=1$ , on a :

$$\Rightarrow (a+b)^1 = a+b$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} \cdot a^k \cdot b^{1-k} = \binom{1}{0} \cdot a^0 \cdot b^1 + \binom{1}{1} \cdot a^1 \cdot b^0 = b+a$$

On vient d'établir l'égalité :  $(a+b)^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} \cdot a^k \cdot b^{1-k}$ .

La propriété  $\mathcal{P}_1$  est vraie.

- **Hérédité :**

Supposons que la propriété est vraie a un rang  $n$  ; c'est à dire qu'on a l'égalité :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

Montrons alors que cette relation est vraie au rang suivant.

On a les transformations algébriques suivantes :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot (a+b)^n$$

Utilisons la relation vérifiée au rang  $n$  :

$$= (a+b) \cdot \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} \right)$$

Développons les termes du premier facteur sur le second facteur :

$$\begin{aligned} &= a \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} + b \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{k+1} \cdot b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} \end{aligned}$$

Effectuons la translation d'indice :  $\ell = k+1$

$$= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} \cdot a^\ell \cdot b^{n-\ell+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1}$$

On peut réutiliser la variable  $k$  dans la première somme :

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} \\ &= \left[ \left( \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} \right) + a^{n+1} \cdot b^0 \right] + \left[ a^0 \cdot b^{n+1} + \left( \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} \right) \right] \\ &= b^{n+1} + \left[ \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} \right] + a^{n+1} \end{aligned}$$

Les deux sommes ayant les mêmes indices :

$$\begin{aligned} &= b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k-1} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} + \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} \right] + a^{n+1} \\ &= b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} + a^{n+1} \end{aligned}$$

D'après la formule du triangle de Pascal :

$$\begin{aligned} &= b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} + a^{n+1} \\ &= a^0 \cdot b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k+1} + a^{n+1} \cdot b^0 \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^k \cdot b^{(n+1)-k} \end{aligned}$$

La propriété  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

- **Conclusion :**

La propriété  $\mathcal{P}_n$  est initialisée au rang 1 et elle vérifie la propriété de récurrence. A l'aide du raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout entier naturel non-nul.