Démonstration :

La démonstration de ce corollaire s'effectue en deux étapes :

- Montrons que :
$\left[p-2\cdot\dfrac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+2\cdot\dfrac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\subset\left[p-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$:

  Considérons la fonction g définie sur $\big[0\,;\,1\big]$ par la relation :
  $g(x)=x\cdot(1-x)$

  On montre facilement que $g'(x)=1-2x$ et on obtient le tableau de variation :

x	0	$\dfrac{1}{2}$	1
Variation de g	0 ↗	$\dfrac{1}{4}$	↘ 1

  Ainsi, pour toute valeur de p *(où $p\in\big[0\,;\,1\big]$)* :
  $$g(p)\leqslant\frac{1}{4}$$
  $$p(1-p)\leqslant\frac{1}{4}$$

  La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$:
  $$\sqrt{p(1-p)}\leqslant\sqrt{\frac{1}{4}}$$
  $$\sqrt{p(1-p)}\leqslant\frac{1}{2}$$
  $$2\cdot\sqrt{p(1-p)}\leqslant2\cdot\frac{1}{2}$$
  $$2\cdot\sqrt{p(1-p)}\leqslant1$$
  $$2\cdot\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$$

  On en déduit les comparaisons suivantes :
  $$-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant\quad-2\cdot\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\quad\leqslant\quad2\cdot\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\quad\leqslant\quad\frac{1}{\sqrt{n}}$$

  Ajoutons p à chaque membre de l'inégalité :
  $$p-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant p-2\cdot\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\leqslant p+2\cdot\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\leqslant p+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

  On vient d'établir l'inclusion :
  $$\left[p-2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\subset\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

- Soit α le nombre réalisant l'égalité ci-dessous où $\mathcal{Z}$ est une variable aléatoire suivant une loi normale réduite et centrée *($\mathcal{Z}\sim\mathcal{N}\big(0\,;1\big)$)* :
  $\mathcal{P}\big(-2\leqslant\mathcal{Z}\leqslant2\big)=1-\alpha$

  A l'aide de la calculatrice, on obtient :
  $\mathcal{P}\big(-2\leqslant\mathcal{Z}\leqslant2\big)\simeq0{,}954$ à 10^{-3} près.

  En appliquant le corollaire du théorème de Moivre-Laplace, on a la valeur de la limite :
  $$\lim_{n\mapsto+\infty}\mathcal{P}\Big(p-2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\leqslant\mathcal{F}_n\leqslant p+2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\Big)$$
  $$=\mathcal{P}\big(-2\leqslant\mathcal{Z}\leqslant2\big)=1-\alpha\simeq0{,}954$$

  Or, la convergence de cette limite implique l'existence d'un entier n_0 afin que tous les termes de rang supérieur à n_0 appartient à l'intervalle $\big[0{,}951\,;\,0{,}957\big]$ centré en 0,954.
  $$n\geqslant n_0\Longrightarrow\mathcal{P}\Big(p-2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\leqslant F_n\leqslant p+2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\Big)>0{,}95$$

De l'inclusion des intervalles :
$$\left[p-2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\subset\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$
On en déduit la comparaison des probabilités :
$$\mathcal{P}\Big(F_n\in\Big[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\Big]\Big)$$
$$\geqslant\mathcal{P}\Big(F_n\in\Big[p-2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\Big]\Big)>0{,}95$$

Démonstration :

La démonstration de ce corollaire s'effectue en deux étapes :

- Montrons que :
$\left[p-2\cdot\dfrac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+2\cdot\dfrac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\subset\left[p-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$:

  Considérons la fonction g définie sur $\big[0\,;\,1\big]$ par la relation :
  $g(x)=x\cdot(1-x)$

  On montre facilement que $g'(x)=1-2x$ et on obtient le tableau de variation :

x	0	$\dfrac{1}{2}$	1
Variation de g	0 ↗	$\dfrac{1}{4}$	↘ 1

  Ainsi, pour toute valeur de p *(où $p\in\big[0\,;\,1\big]$)* :
  $$g(p)\leqslant\frac{1}{4}$$
  $$p(1-p)\leqslant\frac{1}{4}$$

  La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$:
  $$\sqrt{p(1-p)}\leqslant\sqrt{\frac{1}{4}}$$
  $$\sqrt{p(1-p)}\leqslant\frac{1}{2}$$
  $$2\cdot\sqrt{p(1-p)}\leqslant2\cdot\frac{1}{2}$$
  $$2\cdot\sqrt{p(1-p)}\leqslant1$$
  $$2\cdot\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$$

  On en déduit les comparaisons suivantes :
  $$-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant\quad-2\cdot\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\quad\leqslant\quad2\cdot\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\quad\leqslant\quad\frac{1}{\sqrt{n}}$$

  Ajoutons p à chaque membre de l'inégalité :
  $$p-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant p-2\cdot\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\leqslant p+2\cdot\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\leqslant p+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

  On vient d'établir l'inclusion :
  $$\left[p-2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\subset\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

- Soit α le nombre réalisant l'égalité ci-dessous où $\mathcal{Z}$ est une variable aléatoire suivant une loi normale réduite et centrée *($\mathcal{Z}\sim\mathcal{N}\big(0\,;1\big)$)* :
  $\mathcal{P}\big(-2\leqslant\mathcal{Z}\leqslant2\big)=1-\alpha$

  A l'aide de la calculatrice, on obtient :
  $\mathcal{P}\big(-2\leqslant\mathcal{Z}\leqslant2\big)\simeq0{,}954$ à 10^{-3} près.

  En appliquant le corollaire du théorème de Moivre-Laplace, on a la valeur de la limite :
  $$\lim_{n\mapsto+\infty}\mathcal{P}\Big(p-2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\leqslant\mathcal{F}_n\leqslant p+2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\Big)$$
  $$=\mathcal{P}\big(-2\leqslant\mathcal{Z}\leqslant2\big)=1-\alpha\simeq0{,}954$$

  Or, la convergence de cette limite implique l'existence d'un entier n_0 afin que tous les termes de rang supérieur à n_0 appartient à l'intervalle $\big[0{,}951\,;\,0{,}957\big]$ centré en 0,954.
  $$n\geqslant n_0\Longrightarrow\mathcal{P}\Big(p-2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\leqslant F_n\leqslant p+2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\Big)>0{,}95$$

De l'inclusion des intervalles :
$$\left[p-2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\subset\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$
On en déduit la comparaison des probabilités :
$$\mathcal{P}\Big(F_n\in\Big[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\Big]\Big)$$
$$\geqslant\mathcal{P}\Big(F_n\in\Big[p-2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+2\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}\Big]\Big)>0{,}95$$

