Proposition :

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et p :

- $E(\mathcal{X}) = n{\cdot}p$
- $V(\mathcal{X}) = n{\cdot}p{\cdot}(1-p)$
- $\sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{n{\cdot}p{\cdot}(1-p)}$

Preuve :

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et p. On note : $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(n\,;p)$.

Les valeurs prises par la variable $\mathcal{X}$ est un entier k tel que $k \in \{0:1\,;\dots;n\}$. La loi de probabilité de la variable $\mathcal{X}$ est donnée par : $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$$E(\mathcal{X}) = \sum_{k=0}^{n} k{\cdot}\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}k) = \sum_{k=0}^{n} k{\cdot}\binom{n}{k}{\cdot}p^k{\cdot}(1-p)^{n-k}$$

Le terme où $k=0$ est nul ; utilisons l'expression avec les factorielles des coefficients binomiaux :

$$= \sum_{k=1}^{n} k{\cdot}\binom{n}{k}{\cdot}p^k{\cdot}(1\text{-}p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k{\cdot}\frac{n!}{(n\text{-}k)!{\cdot}k!}{\cdot}p^k{\cdot}(1\text{-}p)^{n-k}$$

Faisons apparaître dans le coefficient binomial certains facteurs : n au numérateur et k au dénominateur

$$= \sum_{k=1}^{n} k{\cdot}\frac{(n-1)!\cdot n}{(n-k)!{\cdot}(k-1)!{\cdot}k}{\cdot}p^k{\cdot}(1-p)^{n-k}$$

Simplifions par k la fraction :

$$= \sum_{k=1}^{n} n{\cdot}\frac{(n-1)!}{(n-k)!{\cdot}(k-1)!}{\cdot}p^k{\cdot}(1-p)^{n-k}$$

n est un facteur commun à tous les termes : factorisons

$$= n{\cdot}\Big[\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!{\cdot}(k-1)!}{\cdot}p^k{\cdot}(1-p)^{n-k}\Big]$$

Le paramètre prenant des valeurs supérieures à 1, il est possible de factoriser p dans le facteur p^k :

$$= n{\cdot}\Big[\sum_{k=1}^{n} p\cdot\frac{(n-1)!}{(n-k)!{\cdot}(k-1)!}{\cdot}p^{k-1}{\cdot}(1-p)^{n-k}\Big]$$

Le facteur p est commun à tous les termes de la somme :

$$= n{\cdot}p{\cdot}\Big[\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!{\cdot}(k-1)!}{\cdot}p^{k-1}{\cdot}(1-p)^{n-k}\Big]$$

Effectuons le changement de variable $k'=k-1$: les valeurs de k' sont les entiers de 0 à $(n-1)$ et changeons k en $k'+1$

$$= n{\cdot}p{\cdot}\Big[\sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\big[n-(k'+1)\big]!{\cdot}k'!}{\cdot}p^{k'}{\cdot}(1-p)^{n-(k'+1)}\Big]$$

Faisons apparaître le terme $n-1$:

$$= n{\cdot}p{\cdot}\Big[\sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\big[(n-1)-k'\big]!{\cdot}k'!}{\cdot}p^{k'}{\cdot}(1-p)^{(n-1)-k'}\Big]$$

Nous reconnaissons la valeur d'un coefficient binomial :

$$= n{\cdot}p{\cdot}\Big[\sum_{k'=0}^{n-1} \binom{n-1}{k'}{\cdot}p^{k'}{\cdot}(1-p)^{(n-1)-k'}\Big]$$

Considérons $\mathcal{X}'$ telle que : $\mathcal{X}' \sim \mathcal{B}(n-1\,;p)$:

$$= n{\cdot}p{\cdot}\Big[\sum_{k'=0}^{n-1} \mathcal{P}(\mathcal{X}'{=}k)\Big] = n\cdot p{\times}1 = n{\cdot}p$$

Définition :

Soit n un entier naturel, on définit la **factorielle** de n par :

- Si $n=0$: $0! = 1$
- Si $n\neq 0$: $n! = 1{\times}2{\times}3{\times}\cdots{\times}n$

Remarque :

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est défini dans le programme français actuel comme le nombre de chemin réalisant k succès dans un schéma de Bernoulli de n répétition.

Dans les programmes antérieurs à 2012, le programme français définissait le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ à l'aide de la factorielle par : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!{\cdot}k!}$

Nous devons montrer que ces deux définitions sont équivalentes : pour cela, intéressons nous à la proposition suivante.

Proposition :

Soit n et k deux entiers tels que $k \leqslant n$: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!{\cdot}k!}$

Soit n un entier naturel non-nul. Considérons la propriété $\mathcal{P}_k$ définie par le paramètre k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$:

$\mathcal{P}_k$: “$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$”

Effectuons un raisonnement par récurrence pour établir que la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$:

On considérons tout au long de la démonstration un schéma de Bernouilli de n répétitions.

- **Initialisation :** Pour $k=0$, on a :
  - Il n'y a qu'un chemin représentant 0 succés dans le schéma de Bernouilli : $\binom{n}{0} = 1$
  - $\frac{n!}{(n-0)!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!{\times}1} = 1$

  On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**

  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_k$ est réalisée pour un entier naturel k quelconque tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :

  $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!{\cdot}k!}$$

  $$\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1}$$
  $$= \frac{(n-1)!}{\big[(n-1)-k\big]!\cdot k!} + \frac{(n-1)!}{\big[(n-1)-(k+1)\big]!\cdot(k+1)!}$$
  $$= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\cdot k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-2)!(k+1)!}$$
  $$= \frac{(n-1)!\cdot(k+1)}{(n-k-1)!\cdot(k+1)!} + \frac{(n-1)!\cdot(n-k-1)}{(n-k-1)!(k+1)!}$$
  $$= \frac{(n-1)!\cdot(k+1)+(n-1)!\cdot(n-k-1)}{(n-k-1)!(k+1)!}$$
  $$= \frac{(n-1)!\cdot\big[(k+1)+(n-k-1)\big]}{(n-k-1)!(k+1)!}$$
  $$= \frac{(n-1)!\cdot n}{(n-k-1)!(k+1)!} = \frac{n!}{\big[n-(k+1)\big]!(k+1)!}$$

  On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_{k+1}$.

- **Conclusion :**

  On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_k$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_k$ est définie pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

