Correction 1

Partie A

1. Dans le triangle ABD', on a :
$B'\in[AB]$; $D\in[AD']$; $(DB')/\!/(D'B)$
D'après le théorème de Thalès, on a les égalités des rapports suivants :
$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AD}{AD'} = \frac{B'D}{BD'}$$
Utilisons l'égalité suivante :
$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AD}{AD'}$$
D'après le produit en croix, on a :
$AB'\times AD' = AD\times AB$
Cette dernière égalité montre que les deux rectangles $AB'C'D'$ et $ABCD$ ont la même aire.

2. Les deux rectangles $ABCD$ et $AB'C'D'$ ont la même aire. On en déduit l'égalité suivante :
$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{AB'C'D'}$$
$$x{\cdot}y = \left(\frac{x+y}{2}\right){\cdot}y'$$
$$y' = \frac{x{\cdot}y}{\frac{x+y}{2}}$$
$$y' = x{\cdot}y{\cdot}\frac{2}{x+y}$$
$$y' = \frac{2{\cdot}x{\cdot}y}{x+y}$$

Partie B

1. b. Il semblerait que les suites (x_n) et (y_n) soient deux suites convergentes vers la même valeur qui est :
$\sqrt{6} \simeq 2{,}449$

2. a. En utilisant les résultats obtenus à partir des relations obtenues à la partie **A**, on a les égalités suivantes :
$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} - \frac{2{\cdot}x_n{\cdot}y_n}{x_n+y_n}$$
$$= \frac{\big(x_n+y_n\big)^2}{2{\cdot}(x_n+y_n)} - \frac{4{\cdot}x_n{\cdot}y_n}{2{\cdot}(x_n+y_n)}$$
$$= \frac{x_n^2+2{\cdot}x_n{\cdot}y_n+y_n^2-4{\cdot}x_n{\cdot}y_n}{2{\cdot}(x_n+y_n)} = \frac{x_n^2-2{\cdot}x_n{\cdot}y_n+y_n^2}{2{\cdot}(x_n+y_n)}$$
$$= \frac{\big(x_n-y_n\big)^2}{2{\cdot}(x_n+y_n)}$$

b. En remarquant que le rapport $\dfrac{(x_n-y_n)^2}{2(x_n+y_n)}$ est strictement positif, on en déduit les relations suivantes :
$x_{n+1} - y + n + 1 \geqslant 0 \implies x_{n+1} \geqslant y_{n+1}$
En remarquant que cette relation est également vraie au premier terme $x_0 > y_0$, on en déduit la comparaison suivante pour tout entier naturel n :
$x_n > y_n$
On obtient les comparaisons suivantes pour tout entier naturel n :
$$x_n > y_n$$
$$2{\cdot}x_n > x_n + y_n$$
$$\frac{2{\cdot}x_n}{2} > \frac{x_n+y_n}{2}$$
$$x_n > x_{n+1}$$
La suite (x_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

c. Les termes x_n et y_n sont reliés par la relation :
$$x_n{\cdot}y_n = 6$$
$$y_n = \frac{6}{x_n}$$
La fonction $x \longmapsto \dfrac{6}{x}$ est une fonction décroissante ; on en déduit par composition des sens de variations que la suite $\big(y_n\big)$ est croissante.

d.
- Puisque la suite $\big(x_n\big)$ est décroissante et que la relation $y_n < x_n$ est vraie pour tout entier naturel n, on montre facilement à l'aide dd'un raisonnement par récurrence que :
$y_n < x_0$.
La suite $\big(y_n\big)$ est croissante et majorée par 6.
Si une suite est croissante et majorée alors elle converge.
La suite $\big(y_n\big)$ est une suite convergente.
- De même, la suite $\big(x_n\big)$ est une suite décroissante. Représentant une suite de longueurs, on en déduit que les termes de cette suite sont tous minorés par 0.
Si une suite est décroissante et si elle est majorée, alors cette suite est convergente.
La suite $\big(x_n\big)$ est une suite convergente.

e.
- Le terme x_{n+1} est défini de la manière suivante :
$$x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$$
En notant ℓ et ℓ' les limites respectives des suites $\big(x_n\big)$ et $\big(y_n\big)$, on obtient :
$$\ell = \frac{\ell+\ell'}{2}$$
$$2{\cdot}\ell = \ell + \ell'$$
$$2{\cdot}\ell - \ell = \ell'$$
$$\ell = \ell'$$
On en déduit que les deux suites $\big(x_n\big)$ et $\big(y_n\big)$ convergent vers la même limite.
- Notons ℓ la limite commune aux suites $\big(x_n\big)$ et $\big(y_n\big)$. En considérant la relation :
$x_n{\cdot}y_n = 6$
Par passage à la limite, on obtient :
$$\ell{\cdot}\ell = 6$$
$$\ell^2 = 6$$
$$\ell = \sqrt{6}$$
Ainsi, les deux suites convergent vers $\sqrt{6}$.

f. Ainsi, les deux dimensions des rectangles convergeant vers la même valeur, on en déduit que ces rectangles vont tendre vers un carré.