On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout entier naturel, par :
$w_n = v_n - u_n$

- **Montonie de la suite (w_n) :**

  Etudions la différence suivante :
  $$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n)$$
  $$= (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$$
  Or :
  - La suite (u_n) est croissante. On en déduit que pour tout entier naturel n, on a :
    $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$
  - La suite (v_n) est décroissante. On en déduit que pour tout entier naturel n, on a :
    $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$

  On en déduit que l'inégalité pour tout entier naturel n, on a :
  $w_{n+1} - w_n \leqslant 0$
  La suite (w_n) est décroissante.

- **Comparaisons des termes de (u_n) et (v_n) :**

  Pour tout entier n et k tel que $n \geqslant k$, par la décroissance de la suite (w_n), on a l'inégalité :
  $w_n \leqslant w_k$.

  Sachant que $\lim_{n\mapsto+\infty} w_n = 0$, par passage à la limite, cette inégalité devient :
  $0 \leqslant w_k$ pour tout entier naturel k
  On en déduit que la suite (w_n) est minorée par 0.

  On en déduit que pour tout entier naturel n, on a :
  $u_n \leqslant v_n$

- **Convergence des suites (u_n) et (v_n) :**

  La suite (u_n) est croissnte ; pour tout entier naturel n, on a :
  $u_0 \leqslant u_n$

  La suite (v_n) est décroissnte ; pour tout entier naturel n, on a :
  $v_n \leqslant v_0$

  L'inégalité précédemment établie nous permet d'écrire l'encadrement suivant :
  $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$

  Ainsi, on en déduit :
  - La suite (u_n) est une suite croissante et majorée par le nombre v_0 ; d'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite (u_n) est convergente. Notons ℓ sa limite.
  - La suite (v_n) est une suite décroissante et minorée par le nombre u_0 ; d'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite (v_n) est convergente. Notons ℓ' sa limite.

- *Unicité de la limite des suites (u_n) et (v_n) :*

  En étudions la différence $(v_n - u_n)$, on a par passage à la limite :
  $\lim_{n\mapsto+\infty} v_n - u_n = \ell' - \ell$

  Or, la suite (w_n) admet la limite suivante :
  $\lim_{n\mapsto+\infty} w_n = 0$

  On a l'égalité des deux limites suivantes :
  $$\ell' - \ell = 0$$
  $$\ell' = \ell$$
  On en déduit que les deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) sont convergentes vers une même valeur.

On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout entier naturel, par :
$w_n = v_n - u_n$

- **Montonie de la suite (w_n) :**

  Etudions la différence suivante :
  $$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n)$$
  $$= (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$$
  Or :
  - La suite (u_n) est croissante. On en déduit que pour tout entier naturel n, on a :
    $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$
  - La suite (v_n) est décroissante. On en déduit que pour tout entier naturel n, on a :
    $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$

  On en déduit que l'inégalité pour tout entier naturel n, on a :
  $w_{n+1} - w_n \leqslant 0$
  La suite (w_n) est décroissante.

- **Comparaisons des termes de (u_n) et (v_n) :**

  Pour tout entier n et k tel que $n \geqslant k$, par la décroissance de la suite (w_n), on a l'inégalité :
  $w_n \leqslant w_k$.

  Sachant que $\lim_{n\mapsto+\infty} w_n = 0$, par passage à la limite, cette inégalité devient :
  $0 \leqslant w_k$ pour tout entier naturel k
  On en déduit que la suite (w_n) est minorée par 0.

  On en déduit que pour tout entier naturel n, on a :
  $u_n \leqslant v_n$

- **Convergence des suites (u_n) et (v_n) :**

  La suite (u_n) est croissnte ; pour tout entier naturel n, on a :
  $u_0 \leqslant u_n$

  La suite (v_n) est décroissnte ; pour tout entier naturel n, on a :
  $v_n \leqslant v_0$

  L'inégalité précédemment établie nous permet d'écrire l'encadrement suivant :
  $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$

  Ainsi, on en déduit :
  - La suite (u_n) est une suite croissante et majorée par le nombre v_0 ; d'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite (u_n) est convergente. Notons ℓ sa limite.
  - La suite (v_n) est une suite décroissante et minorée par le nombre u_0 ; d'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite (v_n) est convergente. Notons ℓ' sa limite.

- *Unicité de la limite des suites (u_n) et (v_n) :*

  En étudions la différence $(v_n - u_n)$, on a par passage à la limite :
  $\lim_{n\mapsto+\infty} v_n - u_n = \ell' - \ell$

  Or, la suite (w_n) admet la limite suivante :
  $\lim_{n\mapsto+\infty} w_n = 0$

  On a l'égalité des deux limites suivantes :
  $$\ell' - \ell = 0$$
  $$\ell' = \ell$$
  On en déduit que les deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) sont convergentes vers une même valeur.