Limites de fonction

A. Fonction de références:

1. Fonction carrée:

Proposition :
On a les limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} x^2 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} x^2 = +\infty$$

2. Fonction inverse:

Proposition :
On a les limites suivantes :

- En l'infini : $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{1}{x} = 0^- \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$
- En l'infini : $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

3. Fonction racine carrée:

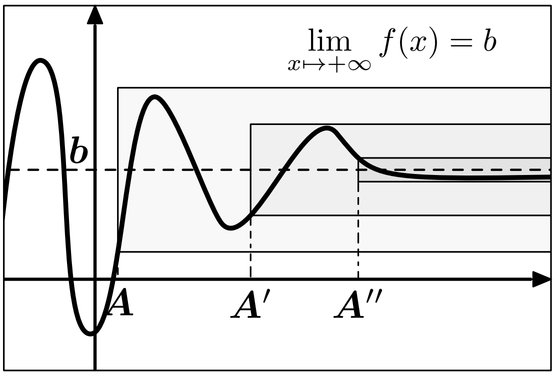
Proposition :
On a la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

4. Fonction valeur absolue:

Proposition :
On a les limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} |x| = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} |x| = +\infty$$

B. Limites:

1. finies en l'infini:



Définition :

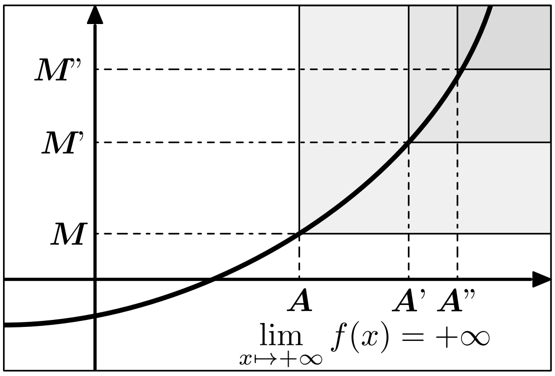
Soit f une fonction numérique définie sur $]a\,;+\infty[$.

On dit que f **admet le réel** b **pour limite en** $+\infty$, si tout intervalle ouvert contenant b contient tous les réels $f(x)$ pour x assez grand.
On note $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} f(x)=b$.

$$\left(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*\right)\left(\exists A\in\left]a\,;+\infty\right[\right)\left(x\geqslant A\implies\left|f(x)-b\right|<\varepsilon\right)$$

On dit que la droite d'équation $y=b$ est une **asymptote horizontale** à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

2. infinies en l'infini :



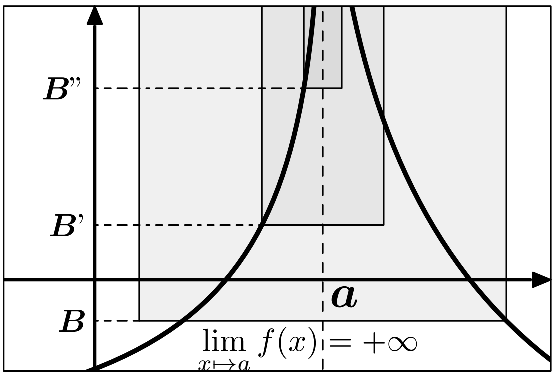
Définition :

Soit f une fonction numérique définie sur $]a\,;+\infty[$.

On dit que f **tend vers** $+\infty$ **quand** x **tend vers** $+\infty$, si tout intervalle de la forme $\left]M\,;+\infty\right[$ *(où* $M\in\mathbb{R}$*)* contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=+\infty$

$$\left(\forall M\in\mathbb{R}\right)\left(\exists A\in\left]a\,;+\infty\right[\right)\left(x>A\implies f(x)>M\right)$$

3. infinies en un nombre réel :



Définition :

Soit a un nombre réel et I un intervalle ouvert et centré en a. On considère f une fonction numérique définie sur l'ensemble $I\backslash\{a\}$.

On dit que la fonction f **a pour limite** $+\infty$ **quand** x **tend vers** a, si tout intervalle ouvert $\left]M\,;+\infty\right[$ *(où* $M\in\mathbb{R}$*)* contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour toutes les valeurs de x assez proche de a. On note $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x)=+\infty$.

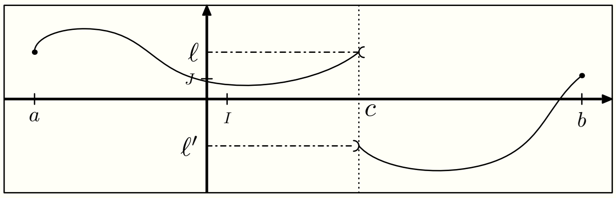
$$\left(\forall M\in\mathbb{R}\right)\left(\exists\eta\in\mathbb{R}_+^*\right)\left(x\in I\backslash\{a\}\text{ et }\left|x-a\right|<\eta\implies f(x)>M\right)$$

On dit que la droite d'équation $x=a$ est une **asymptote verticale** à la courbe $\mathscr{C}_f$ en a.

4. A droite et à gauche :

Remarque :

Considérons la fonction f définie sur $[a\,;b]\backslash\{c\}$ et admettant la représentation suivante :



On remarque que la fonction admet deux limites au voisinage de x :

- En se rapprochant de x dans l'intervalle $[a\,;c[$, $f(x)$ se rapproche de ℓ. On note :
  $\lim\limits_{\substack{x\mapsto c\\ x<c}} f(x)=\ell$ ou $\lim\limits_{x\mapsto c^-} f(x)=\ell$
- En se rapprochant de x dans l'intervalle $]c\,;b]$, $f(x)$ se rapproche de ℓ'. On note :
  $\lim\limits_{\substack{x\mapsto c\\ x>c}} f(x)=\ell'$ ou $\lim\limits_{x\mapsto c^+} f(x)=\ell'$

Exemple :

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x-\sqrt{x}}$

On a $\lim\limits_{x\mapsto0^+} x-\sqrt{x}=0$ mais nous devons déterminer si :

$\lim\limits_{x\mapsto0^+} x-\sqrt{x}=0^-$ ou $\lim\limits_{x\mapsto0^+} x-\sqrt{x}=0^+$

On a : $f(x)=\dfrac{1}{x-\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)}$

Pour $x\in[0\,;+\infty[$ et x proche de 0 : $\sqrt{x}>0$; $\sqrt{x}-1<0$

$\implies \lim\limits_{x\mapsto0^+}\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)=0^- \implies \lim\limits_{x\mapsto0^+} f(x)=-\infty$

C. Opérations sur les limites :

Limite d'une somme :

Si $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x)=$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $\lim\limits_{x\mapsto a} g(x)=$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x)+g(x)=$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Limite d'un produit :

Si $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x) =$	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si $\lim\limits_{x\mapsto a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x)\cdot g(x) =$	$\ell\cdot\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	?

Limite d'un quotient :

Si $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x) =$	ℓ	ℓ	$\ell\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si $\lim\limits_{x\mapsto a} g(x) =$	$\ell'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Alors $\lim\limits_{x\mapsto a} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	?	?

Exemple : *(d'utilisation)*

- Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\Big(\dfrac{1}{x}-2\Big)\cdot\sqrt{x}$
  Déterminons la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
  Etudions les deux facteurs de l'expression de f :
  - Le premier facteur est la somme des deux expressions :
    $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} -2 = -2$
    Les limites d'une somme donnent :
    $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{1}{x} - 2 = -2$
  - $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

  Les limites d'un produit donnent :
  $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \Big(\dfrac{1}{x}-2\Big)\cdot\sqrt{x} = -\infty$
- Soit : $g(x) = \dfrac{1}{6\cdot x^2+8\cdot x-8}$; $\mathbb{R}\backslash\Big\{-2\,;\dfrac{2}{3}\Big\}$
  Le dénominateur admet pour tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$6\cdot x^2+8\cdot x-5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  On a les deux limites suivantes :
  - $\lim\limits_{x\mapsto-2^+} 1 = 1$
  - $\lim\limits_{x\mapsto-2^+} 6\cdot x^2+8\cdot x-5 = 0^-$

  Les limites d'un quotient et la règle des signes donnent :
  $\lim\limits_{x\mapsto-2^+} g(x) = \lim\limits_{x\mapsto-2^+} \dfrac{1}{6\cdot x^2+8\cdot x-5} = -\infty$

Remarque :

Certains résultats d'opérations sur les limites ne sont pas donnés dans le tableau ci-dessous : on les appelle des **formes indéterminées**. Car aucune règle générale ne peut être conclut dans ces cas.
Etudions l'unique forme indéterminée des opérations sur une somme de limites :

- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^2-x$
- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \sqrt{x}-x$

Ce sont deux limites de la forme : "$(+\infty)+(-\infty)$"

- On a la factorisation : $x^2-x = x\cdot(x-1)$

Des deux limites : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x-1 = +\infty$
Les limites d'un produit permettent d'affirmer :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^2-x = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} x\cdot(x-1) = +\infty$

- Avec l'expression $\sqrt{x}-x$, on travaille implicitement sur $\mathbb{R}^+$. On a les transformations algébriques :
  $\sqrt{x}-x = \sqrt{x}-\big(\sqrt{x}\big)^2 = \sqrt{x}\cdot\big(1-\sqrt{x}\big)$
  Etudions les limites des deux facteurs :
  - $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
  - Les deux termes ont pour limites :
    - $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 1 = 1$
    - $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} -\sqrt{x} = -\infty$

    Les limites d'une somme permettent d'affirmer :
    $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 1-\sqrt{x} = -\infty$

  Les limites d'un produit permettent d'affirmer :
  $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \sqrt{x}-x = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \sqrt{x}\cdot\big(1-\sqrt{x}\big) = -\infty$

Exemple :

Voici quelques traitements de formes indéterminées :

- Soit $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$. Déterminons $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$:
  On a les transformations algébriques :

$$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x+1} = \frac{x^2\cdot\Big(1-\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\Big)}{x\cdot\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)} = \frac{x\cdot\Big(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\Big)}{1+\dfrac{1}{x}}$$

  Les limites d'une somme permettent d'obtenir :
  - $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 1-\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2} = 1$
  - $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1$

  Les limites d'un produit permet d'obtenir :
  $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x\cdot\Big(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\Big) = +\infty$
  Les limites d'un quotient permettent d'obtenir :
  $$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x\cdot\Big(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\Big)}{1+\dfrac{1}{x}} = +\infty$$
- Soit $g(x)=\dfrac{3-2\cdot x}{-2\cdot x^2+9\cdot x-9}$. Déterminons $\lim\limits_{x\mapsto\frac{3}{2}} g(x)$.
  Pour le dénominateur, on a :
  $\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = 9^2-4\times(-2)\times(-9) = 9$
  Puisque $\Delta>0$, on a les deux racines :
  $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = 3$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \dfrac{3}{2}$
  On a la factorisation :

$$-2\cdot x^2+9\cdot x-9 = -2\cdot(x-3)\Big(x-\frac{3}{2}\Big) = (x-3)(3-2\cdot x)$$

  L'expression de g admet la simplification :
  $g(x) = \dfrac{3-2\cdot x}{(x-3)(3-2\cdot x)} = \dfrac{1}{x-3}$
  On a les deux limites :
  - $\lim\limits_{x\mapsto\frac{3}{2}} 1 = 1$
  - $\lim\limits_{x\mapsto\frac{3}{2}} x-3 = -\dfrac{3}{2}$

  Les limites d'un quotient permettent d'obtenir :
  $\lim\limits_{x\mapsto\frac{3}{2}} g(x) = \lim\limits_{x\mapsto\frac{3}{2}} \dfrac{1}{x-3} = -\dfrac{2}{3}$

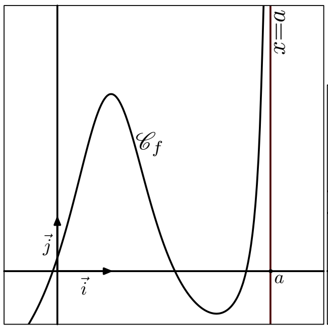
Remarque :

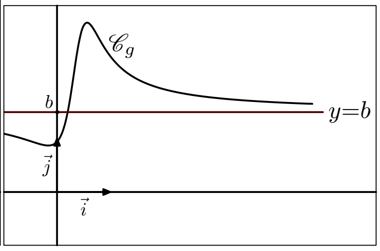
Soit f une fonction définie par une fraction rationnelle :

- Pour déterminer la limite en $+\infty$, on factorise par les monômes de plus haut degré :
  $$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{2+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = 2$$
- Pour déterminer la limite en 0^+, on factorise par les monômes de plus bas degré :
  $$\lim_{x\mapsto0^+} \frac{x^2-x}{x^3+x} = \lim_{x\mapsto0^+} \frac{x-1}{x^2+1} = -1$$

D. Caractérisation géométrique :

- La fonction f admet la limite $\lim\limits_{x\mapsto a-} f(x)=+\infty$. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet l'asymptote verticale d'équation $x=a$.
- La fonction g admet la limite $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)=b$. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_g$ admet l'asymptote horizontale d'équation $y=b$.





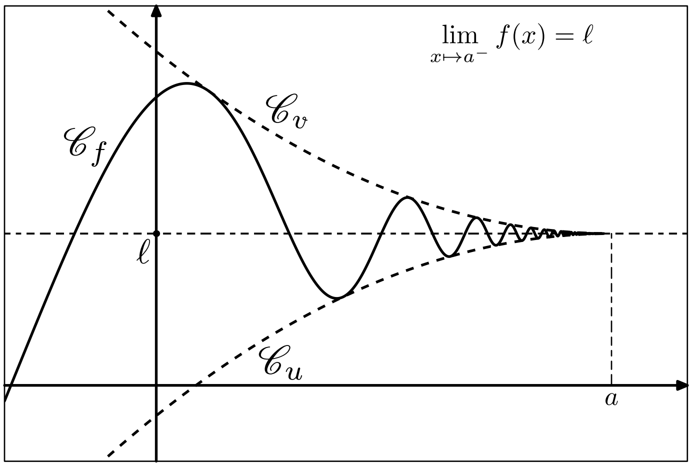
E. Théorème des gendarmes :

Théorème : *(Théorème des gendarmes)*

Soit ℓ un nombre réel et f, u, v trois fonctions définies sur $\big[a\,;+\infty\big[$ tels que :

- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} v(x) = \ell$
- Pour tout $x\in\big[a\,;+\infty\big[$:
  $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$

Alors on a : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = \ell$



Preuve :

Prenons un intervalle ouvert I contenant ℓ, montrons que pour x assez grand, les valeurs de $f(x)$ sont entièrement contenues dans I.

- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u(x) = \ell$: il existe α tel que :
  $x\geqslant\alpha \Longrightarrow u(x)\in I$
- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} v(x) = \ell$: il existe α' tel que :
  $x\geqslant\alpha \Longrightarrow v(x)\in I$

Notons $A=max\big(\alpha\,;\alpha'\big)$ et pour $x\geqslant A$:

$$\left.\begin{array}{l} u(x)\in I \text{ et } v(x)\in I \\ I \text{ est un intervalle}\end{array}\right\} \Longrightarrow \big[u(x)\,;v(x)\big]\subset I$$

Ainsi, $f(x)\in I$

Théorème : *(Théorème des gendarmes)*

Soit ℓ un nombre réel et f, u, v trois fonctions définies sur $\big[a\,;b\big[$ tels que :

- $\lim\limits_{x\mapsto b^-} u(x) = \lim\limits_{x\mapsto b^-} v(x) = \ell$
- Pour tout $x\in\big[a\,;b\big[$: $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$

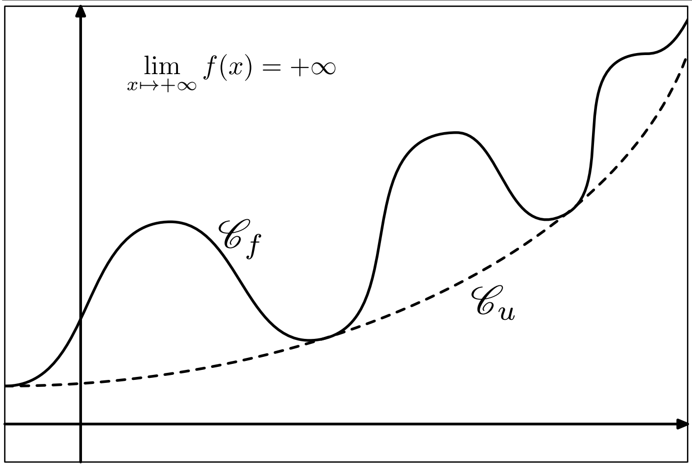
Alors : $\lim\limits_{x\mapsto b^-} f(x) = \ell$

Théorème : *(Cas des limites infinies)*

Soit f et u deux fonctions ; a représente soit un nombre réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$. Supposons que :

- Pour tout réel x voisin de a : $f(x)\geqslant u(x)$
- $\lim\limits_{x\mapsto a} u(x) = +\infty$

Alors : $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x) = +\infty$



F. Composition de fonctions :

Définition :

Soit f et g deux fonctions tels que :

- La fonction f est définie sur un intervalle I ;
- La fonction g est définie sur l'ensemble $f\big(I\big)$.

On définit la fonction **composée de** f **par** g, notée $\big(g\circ f\big)$ *(qui se lit "g rond f")* définit sur l'ensemble I par la relation :

$$\big(g\circ f\big)(x) = g\big[f(x)\big]$$

Exemple :

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2{\cdot}x+1 \quad ; \quad g(x) = x^2+1$

Par composition, on peut créer les deux fonctions :

- $\big(f\circ g\big)(x) = f\big[g(x)\big] = f\big(x^2+1\big)$
  $= 2{\cdot}\big(x^2+1\big)+1 = 2{\cdot}x^2+3$
- $\big(g\circ f\big)(x) = g\big[f(x)\big] = g\big(2{\cdot}x+1\big)$
  $= \big(2{\cdot}x+1\big)^2+1 = 4{\cdot}x^2+4{\cdot}x+2$

Proposition :

Soit f et g deux fonctions telles que f soit définie sur I et g définie sur $f(I)$.

On note a, b c des nombres réels et/ou $\pm\infty$.

$$\text{Si}\quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\mapsto a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\mapsto b} g(x) = c\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\mapsto a} \big(g\circ f\big)(x) = c$$

Preuve :

http ://chingatome.fr/r16

Exemple :

Soit f et g définie par :

$$f(x) = \frac{2{\cdot}x+1}{x-1} \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x}$$

La fonction $\big(g\circ f\big)$ admet pour expression :

$$\big(g\circ f\big)(x) = \sqrt{\frac{2{\cdot}x+1}{x-1}}$$

Déterminons la limite en $+\infty$ de $\big(g\circ f\big)$:

$$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2{\cdot}x+1}{x-1} = 2 \\ \displaystyle\lim_{x\mapsto 1}\sqrt{x} = \sqrt{2}\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{\frac{2{\cdot}x+1}{x-1}} = \sqrt{2}$$