Les racines carrées

A. Présentation:

- Pour certain nombre, entier ou décimaux, il est facile de répondre à la question :
  - ➩ Quel est le nombre dont le carré vaut 9?
  - ➩ Quel est le nombre dont le carré vaut 1,44?
- **Définition :**
  Pour tout nombre positif a, on appelle **racine carré du nombre** a l'unique nombre positif dont le carré vaut a.
  Ce nombre se note $\sqrt{a}$.

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, bend left, "\blacklozenge^2"] & 9 \arrow[l, bend left, "\sqrt{\blacklozenge}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1,2 \arrow[r, bend left, "\blacklozenge^2"] & 1,44 \arrow[l, bend left, "\sqrt{\blacklozenge}"] \end{tikzcd}$$

  Ainsi, on note :
  $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$; $\sqrt{16} = 4$

  Prendre la racine carré d'un nombre est l'opération inverse de prendre le carré d'un nombre.
- Par contre le nombre réalisant le diagramme ci-contre est ni un nombre entier, ni un nombre décimaux, ni un quotient. La seule notation possible de ce nombre est $\sqrt{2}$.

$$\begin{tikzcd} ? \arrow[r, bend left, "\blacklozenge^2"] & 2 \arrow[l, bend left, "\sqrt{\blacklozenge}"] \end{tikzcd}$$

- Soit l'équation (E) : $x^2 = a$:
  - ➩ pour $a<0$: (E) n'a pas de solution : $\mathcal{S}=\varnothing$.
  - ➩ pour $a=0$: (E) a une seule solution : $\mathcal{S}=\{0\}$.
  - ➩ pour $a>0$: (E) a deux solutions : $\mathcal{S}=\{-\sqrt{a}\,;\,\sqrt{a}\}$.

B. Propriétés:

- De la définition, on a les deux propriétés :
  $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$; $\sqrt{a^2} = a$
- Pour tous nombres a et b positifs avec $b \neq 0$, on a les deux propriétés :

$\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$	La racine carrée d'un produit est égale au produit des racines carrées
$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	La racine d'un quotient est égale au quotient des racines

- Par contre, aucune formule n'existe pour des additions ou des soustractions se trouvant sous la racine carrée :
  $\sqrt{1+1} \neq \sqrt{1}+\sqrt{1}$; $\sqrt{9-4} \neq \sqrt{9}-\sqrt{4}$

C. Simplifications:

- Pour simplifier une racine carrée, il faut trouver dans le nombre sous la racine carrée le plus de facteur sous la forme d'un carré :
  $18 = 9\times 2$; $72 = 9\times 4\times 2$
- On utilise maintenant la propriété sur la racine carrée d'un produit :
  - ➩ $\sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = \sqrt{9}\times\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
  - ➩ $\sqrt{72} = \sqrt{9\times 4\times 2} = \sqrt{9}\times\sqrt{4}\times\sqrt{2} = 6\cdot\sqrt{2}$
- On utilise maintenant la propriété $\sqrt{a^2} = a$:
  - ➩ $\sqrt{18} = \sqrt{9}\times\sqrt{2} = \sqrt{3^2}\times\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
  - ➩ $\sqrt{72} = \sqrt{9\times 4\times 2} = \sqrt{9}\times\sqrt{4}\times\sqrt{2}$
    $= \sqrt{3^2}\times\sqrt{2^2}\times\sqrt{2} = 3\times 2\times\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
- Pour supprimer les radicaux aux dénominateurs d'une fraction, les deux règles suivantes :
  $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a\times k}{b\times k}$; $\left(\sqrt{at}\right)^2 = a$

  Voici un exemple :
  $$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$
- Pour aller un peu plus loin, si le dénominateur d'un quotient est la racine carré d'un nombre, voici comment transformer ce quotient avec un entier au dénominateur :
  $$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

D. Dans des calculs:

Les racines carrés étant aussi des nombres, on peut utiliser sur eux la distributivité, la double distributivité et les identiés remarquables

- La **multiplication** des radicaux :
  Il faut simplifier chaque racine carrées, puis multiplier les facteurs de même nature : les entiers entre eux et les racines carrées entre elles :
  $2\sqrt{3}\times 4\sqrt{3} = (2\times 4)\times(\sqrt{3}\times\sqrt{3}) = 8\times 3 = 24$
- L'**addition** de racines carrés :
  il faut commencer à simplifier chacune des racines carrées, puis de simplifier en identifiant les termes ayant les mêmes facteur :
  $\sqrt{8}+3\sqrt{2}+7\sqrt{18} = \sqrt{2^2\times 2}+3\sqrt{2}+7\sqrt{3^2\times 2}$
  $= 2\times\sqrt{2}+3\sqrt{2}+7\times 3\times\sqrt{2}$
  $= (2+3+21)\times\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$
- La **double-distributivité** :
  $\left(5+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right) = 5-5\sqrt{2}+\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}\right)^2$
  $= 5-5\sqrt{2}+\sqrt{2}-2 = 3-4\sqrt{2}$
- Les **identités remarquables** :
  - ➩ $\left(3+\sqrt{2}\right)^2 = 9+6\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2 = 13+6\sqrt{2}$
  - ➩ $9x^2-3 = \left(3x\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(3x+\sqrt{3}\right)\left(3x-\sqrt{3}\right)$