

Terminale Option Complémentaire / Algorithmes

1. Structure répétitive

E.1 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel :

$$u_0 = 115 \quad ; \quad u_{n+1} = 0.4 \cdot u_n + 120$$

On considère les trois parties d'algorithmes ci-dessous présentant chacune une fonction `terme()` prenant un entier n supérieur ou égal à 1 pour argument :

Algorithme 1

```
Fonction terme(n)
  Pour i de 1 à n
    U ← 0;4× U+120
  Fin Pour
  Renvoyer U
```

Algorithme 2

```
Fonction terme(n)
  Pour i de 1 à n
    U ← 115
    U ← 0;4× U+120
  Fin Pour
  Renvoyer U
```

Algorithme 3

```
Fonction terme(n)
  U ← 115
  Pour i de 1 à n
    U ← 0;4× U+120
  Fin Pour
  Renvoyer U
```

Expliquer pourquoi les fonctions `terme()` des deux premiers algorithmes, appelées avec l'entier n , ne renvoient pas le terme de la suite (u_n) de rang n .

E.2 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel :

$$u_0 = 50000 \quad ; \quad u_{n+1} = 0,95 \cdot u_n + 3000 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On considère les trois parties d'algorithmes présentant chacune une fonction `f` :

```
Fonction terme1(A)
  n ← 0
  U ← 50000
  Tant que U < A
    n ← n+1
    U ← 0;95·U+3000
  Fin Tant que
  Renvoyer n
```

```
Fonction terme2(n)
  U ← 50000
  Pour i allant de 1 à n
    U ← 0;95·U+3000
  Fin Tant que
  Renvoyer U
```

```
Fonction terme3(n)
  U ← 50000
  Pour i allant de 0 à n
    U ← 0;95·U+3000
  Fin Tant que
  Renvoyer U
```

Parmi toutes les fonctions ci-dessus, laquelle permet, par une exécution pas à pas et en observant les valeurs successives prises par la variable `U`, d'obtenir toutes les valeurs des termes de la suite (u_n) pour les rangs allant de 0 à n .

E.3 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot u_n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- ① On souhaite écrire une fonction dans un algorithme prenant pour argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur du terme de rang n de la suite (u_n)

Parmi les trois fonctions suivantes, une seule convient. Indiquer lequel et justifier pourquoi les deux autres ne peuvent donner le résultat attendu.

Algorithme 1

```
Fonction suite(n)
  U ← 5
  Pour i de 0 à n
    U ←  $\frac{1}{2}$ ×U+1
  Fin Pour
  Renvoyer U
```

Algorithme 2

```
Fonction suite(n)
  Pour i de 0 à n
    U ← 5
    U ←  $\frac{1}{2}$ ×U+1
  Fin Pour
  Renvoyer U
```

Algorithme 3

```
Fonction suite(n)
  U ← 5
  Pour i de 0 à n
    U ←  $\frac{1}{2}$ ×U+1
  Renvoyer U
Fin Pour
```

- ② En appelant la fonction `f` avec l'argument 9, la variable `U` se voit affecter successivement les valeurs suivantes :

5	3,5	2,75	2,375	2,185	2,0938	2,0469	2,0234	2,0117	2,0059
---	-----	------	-------	-------	--------	--------	--------	--------	--------

Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variation de cette suite ?

2. Structure répétitive : étude de la condition d'arrêt

E.4 On étudie l'évolution de la population d'une ville, depuis le 1^{er} janvier 2008.

On considère la population de cette ville à partir du 1^{er} janvier 2008 par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3}{1 + 2e^{-0,05x}}$$

où x désigne le nombre d'années écoulées depuis le 1^{er} janvier 2008 et $f(x)$ le nombre d'habitants en centaines de milliers.

On admet que f est croissante sur $[0; +\infty[$

On considère l'algorithme suivant :

```
X ← 0
Tant que f(X) ≤ 2
  X ← X+1
Fin Tant que
```

Si on exécute cet algorithme alors en fin d'exécution la variable `X` aura pour valeur 28. Interpréter ce résultat dans le contexte de ce problème.

3. Structure répétitive : étude du seuil d'une suite

E.5 On considère la suite (a_n) définie par :

$$a_0 = 2500 \quad ; \quad a_{n+1} = 0,8 \cdot a_n + 400$$

- ① On admet que le terme général de la suite (a_n) admet pour expression :

$$a_n = 500 \times 0,8^n + 2000$$

En déduire la limite de la suite (a_n) .

- 2 On propose l'algorithme suivant :

```

N ← 0
A ← 2500
Tant que A-2000 > 50
    A ← A×0;8+400
    N ← N+1
Fin Tant que
    
```

- a Expliquer ce que représente la valeur de la variable N à la fin de l'exécution de cet algorithme.
- b À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de la variable N à la fin de l'exécution de cet algorithme et interpréter le résultat.

E.6 On considère la suite (u_n) est définie par $u_0 = 5700$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = 1,015 \cdot u_n - 300$

On considère l'algorithme suivant :

```

u ← 5700
n ← 0
Tant que u > 4500
    u ← 1;015 × u - 300
    n ← n+1
Fin Tant que
    
```

- 1 Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaire entre la deuxième et la dernière colonne.

Valeur de u	5700			
Valeur de n	0			
$u > 4500$ (vrai/faux)	vrai		vrai	faux

- 2 À la fin de l'exécution de l'algorithme, quelle est la valeur de la variable n ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

E.7 On considère l'algorithme suivant :

```

U ← 4
N ← 0
Tant que U < 40
    
```

4. Structure répétitive : trouver la condition d'arrêt

E.9 On considère la suite (u_n) définie par :
 $u_0 = 20$; $u_{n+1} = 0,92 \cdot u_n + 3$

- 1 On admet que le terme général de la suite (u_n) admet pour expression :

$$u_n = -17,5 \times 0,92^n + 37,5$$

En déduire la limite de la suite (u_n) .

- 2 a Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'à la fin de son exécution la variable N représente le rang à partir duquel les termes de la suite auront une valeur supérieure ou égale à 25.

```

U ← 0;92 × U + 8
N ← N+1
Fin Tant que
    
```

- 1 Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant autant de colonnes que nécessaire.

Les valeurs de U seront arrondies au dixième.

Valeur de U	4	...	...
Valeur de N	0	...	...
Condition $U < 40$	vraie	...	...

- 2 Donner la valeur de la variable N à la fin de l'exécution de cet algorithme.

E.8 Maya possède 20 € dans sa tirelire au 1^{er} juin 2018.

À partir de cette date, chaque mois, elle dépense un quart du contenu de sa tirelire puis y place 20 € supplémentaires.

Pour tout entier naturel n , on note u_n la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du n -ième mois. On a : $u_0 = 20$.

On admet que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,75 \cdot u_n + 20$$

On considère l'algorithme suivant :

```

U ← 20
N ← 0
Tant que U < 70
    U ← 0;75 × U + 20
    N ← N+1
Fin Tant que
Afficher N
    
```

- 1 Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui retrace les différentes étapes de l'exécution de l'algorithme. On ajoutera autant de colonnes que nécessaire à la place de celle laissée en pointillés. Arrondir les résultats au centième.

Valeur de U	20			
Valeur de N	0			
Condition $U < 70$	vrai		vrai	faux

- 2 Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```

U ← 20
N ← 0
Tant que ...
    U ← 0;92 × U + 3
    N ← N + 1
Fin Tant que
    
```

- b À l'aide de la calculatrice, déterminer le rang à partir duquel les termes de la suite (u_n) seront pour la première fois supérieur ou égal à 25.

E.10

- 1 Déterminer par le calcul la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que :

$$250 + 1250 \times 0,8^n < 500$$
- 2 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1500 \quad ; \quad u_{n+1} = 0,8 \cdot u_n + 50 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'à la fin de son exécution la variable u a pour valeur la solution obtenue à la question précédente :

```

u ← 1500
n ← 0
Tant que ..... faire
    u ← .....
    n ← .....
Fin Tant que

```

E.11 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,8 \cdot u_n + 18$

On admet que : $u_n = 90 - 25 \times 0,8^n$

On considère l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	$u \leftarrow 65$
ligne 2	$n \leftarrow 0$
ligne 3	Tant que
ligne 4	$n \leftarrow n+1$
ligne 5	$u \leftarrow 0,8 \times u + 18$
ligne 6	Fin Tant que

- 1 Recopier et compléter la ligne 3 de cet algorithme afin qu'il détermine le plus petit entier naturel n tel que :

$$u_n \geq 85.$$
- 2 Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution

de l'algorithme?

- 3 Retrouver par le calcul le résultat de la question précédente en résolvant l'inéquation $u_n \geq 85$

E.12 Une société propose des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Le directeur de cette société remarque que, chaque année, 14 % des contrats supplémentaires sont souscrits et 7 sont résiliés.

En 2017, l'entreprise dénombrait 120 contrats souscrits.

On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n est le nombre de contrats souscrits l'année $2017+n$.

Ainsi, on a : $u_0 = 120$

- 1 Justifier que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = 1,14 \cdot u_n - 7$$
- 2 Compte tenu de ses capacités structurelles actuelles, l'entreprise ne peut prendre en charge que 190 contrats. Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel.

On cherche donc à savoir en quelle année l'entreprise devra embaucher.

Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

```

n ← 0
u ← 120
Tant que .....
    n ← n+1
    .....
Fin Tant que
Affiche 2017+n

```

- a Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus.
- b Quelle est l'année affichée en sortie d'algorithme? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.