

Terminale Option Complémentaire / Annales intégrales

1. Intégrales

E.1 Une entreprise fabrique des enceintes acoustiques sans fil. Le coût de production d'une enceinte est de 300 euros.

On note x le prix de vente en centaines d'euros d'une enceinte. Une étude de marché permet de modéliser la situation : pour tout réel x de l'intervalle $[3; 10]$, si le prix de vente d'une enceinte est x centaines d'euros, alors le nombre d'acheteurs est modélisé par :

$$f(x) = e^{-0,25 \cdot x + 5}$$

Ainsi, $f(x)$ est une approximation du nombre d'acheteurs pour un prix de vente de x centaines d'euros. Par exemple, si le prix de vente d'une enceinte est fixé à 400 euros, le nombre d'acheteurs est approché par $f(4)$.

① Donner une valeur approximative du nombre d'acheteurs pour un prix de vente de 400 euros.

On appelle marge brute la différence entre le montant obtenu par la vente des enceintes et leur coût de production.

② Quelle est la marge brute de cette entreprise pour un prix de vente de 400 euros par enceinte ?

On note $g(x)$ la marge brute, en centaines d'euros, réalisée par l'entreprise pour un prix de vente de x centaines d'euros par enceinte.

③ Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[3; 10]$: $g(x) = (x - 3) \cdot e^{-0,25 \cdot x + 5}$

④ Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

factoriser(dériver[(x-3)*exp(-0,25*x+5)])
$-\frac{x-7}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4}x+5}$

a) En utilisant le résultat du logiciel de calcul formel, étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[3; 10]$.

b) Pour quel prix de vente unitaire l'entreprise réalisera-t-elle la marge brute maximale ? Donner la valeur de cette marge brute arrondie à l'euro près.

⑤ Soit G la fonction telle que $G(x) = (-4 \cdot x - 4) \cdot e^{-0,25 \cdot x + 5}$ pour tout réel x de $[3; 10]$.

a) Montrer que G est une primitive de la fonction g .

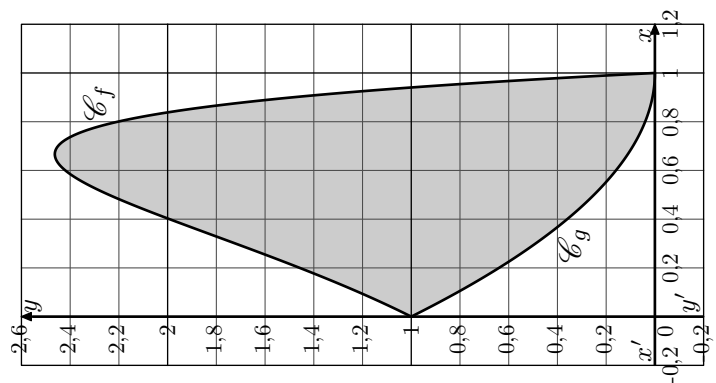
b) On pose $I = \int_3^{10} g(x) dx$. Déterminer la valeur exacte de I .

E.2 Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.

Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies pour tout réel x de $[0; 1]$ par :

$$f(x) = (1 - x) \cdot e^{3x} ; \quad g(x) = x^2 - 2 \cdot x + 1$$

Leurs courbes représentatives seront notées $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.



Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

Dériver (1-x)*exp(3x)
$-3x \cdot \exp(3x) + 2 \cdot \exp(3x)$
factoriser $-3x \cdot \exp(3x) + 2 \cdot \exp(3x)$
$\exp(3x) \cdot (-3x + 2)$
factoriser(dériver(exp(3x)*(-3x+2)))
$3 \cdot \exp(3x) \cdot (1 - 3x)$

Lecture : la dérivée de la fonction f est donnée par :

$$f'(x) = -3x \cdot e^{3x} + 2 \cdot e^{3x},$$

ce qui, après factorisation, donne : $f'(x) = (-3x + 2) \cdot e^{3x}$

① Étudier sur $[0; 1]$ le signe de la fonction dérivée f' , puis donner le tableau de variations de f sur $[0; 1]$ en précisant les valeurs utiles.

② La courbe $\mathcal{C}_f$ possède un point d'inflexion. Déterminer ses coordonnées.

Partie B

On se propose de calculer l'aire de la partie grisée sur le graphique.

① Vérifier que les points A et B de coordonnées respectives $(1; 0)$ et $(0; 1)$ sont des points communs aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

② On admet que : pour tout x dans $[0; 1]$:

$$f(x) - g(x) = (1 - x) \cdot (e^{3x} - 1 + x)$$

a) Justifier que pour tout x dans $[0; 1]$: $e^{3x} - 1 \geq 0$

b) En déduire que pour tout x dans $[0; 1]$: $e^{3x} - 1 + x \geq 0$

c) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout x dans $[0; 1]$.

3 a Calculer $\int_0^1 g(x) dx$.

b On admet que : $\int_0^1 f(x) dx = \frac{e^3 - 4}{9}$

Calculer l'aire $\mathcal{S}$, en unité d'aire, de la partie grisée. Arrondir le résultat au dixième.

E.3 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

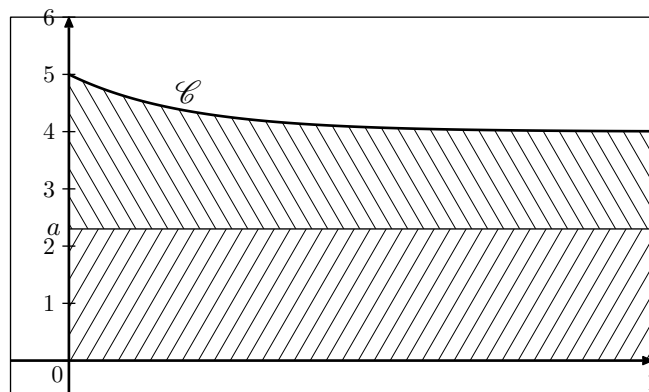
$$f(x) = 4 + e^{-5x}$$

On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f dans un repère du plan.

Le domaine $\mathcal{D}$ hachuré sur la figure est le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=1$.

On veut partager le domaine hachuré en deux domaines de

même aire par une droite d'équation $y=a$, parallèle à l'axe des abscisses, selon l'exemple donné ci-dessous.



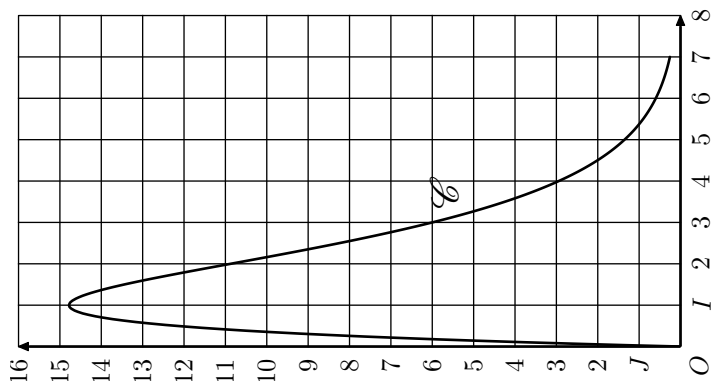
- 1 Justifier que la valeur $a=3$ ne convient pas.
- 2 Déterminer à 0,1 près une valeur de a qui convienne.

2. Intégrales et théorème des valeurs intermédiaires

E.4 Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, les réponses seront données sans justification, avec la précision permise par le graphique ci-dessous :



Celui-ci présente dans un repère d'origine O la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 7]$.

- 1 Encadrer par deux entiers consécutifs chacune des solutions de l'équation $f(x)=10$ sur l'intervalle $[0; 7]$.
- 2 Donner le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0; 7]$ et préciser la valeur en laquelle il est atteint.
- 3 La valeur de l'intégrale $\int_1^3 f(x) dx$ appartient à un seul des intervalles suivants. Lequel?

- a $[9; 17]$ b $[18; 26]$ c $[27; 35]$

Partie B

La courbe donnée dans la partie A. est la représentation de la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 7]$ d'expression :

$$f(x) = 2 \cdot x \cdot e^{-x+3}$$

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .

- 1 Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 7]$:

$$f'(x) = (-2x + 2) \cdot e^{-x+3}$$
- 2 a Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 7]$ puis en déduire le tableau de variations de la fonction sur ce même intervalle.
 b Calculer le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0; 7]$.
- 3 a Justifier que l'équation $f(x)=10$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0; 7]$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.
 b On admet que $\alpha \approx 0,36$ à 10^{-2} près. Donner la valeur de β , arrondie à 10^{-2} près.
- 4 On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 7]$ par :

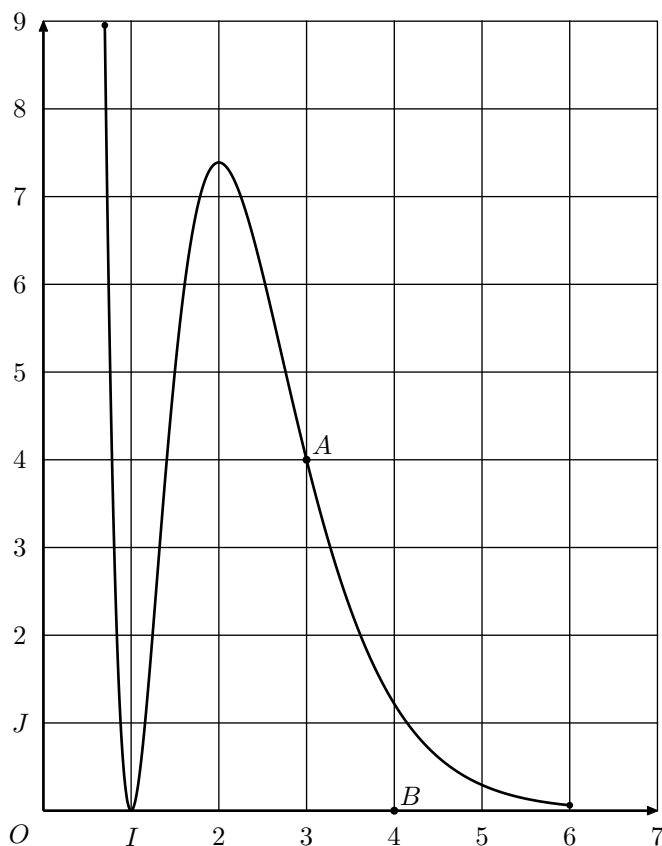
$$F(x) = (-2x - 2) \cdot e^{-x+3}$$
 a Justifier que F est une primitive de f sur l'intervalle $[0; 7]$.
 b Calculer la valeur exacte de l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équations $x=1$, $x=3$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$.
- 5 La fonction f étudiée modélise le bénéfice d'une entreprise, en milliers d'euros, réalisé pour la vente de x centaines d'objets (x compris entre 0 et 7).
 a Calculer la valeur moyenne du bénéfice, à l'euro près, lorsque l'entreprise vend entre 100 et 300 objets.
 b L'entreprise souhaite que son bénéfice soit supérieur à 10 000 euros. Déterminer le nombre d'objets possibles que l'entreprise devra vendre pour atteindre son objectif.

3. Intégrales et convexité

E.5 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0,7;6]$; on suppose que f est dérivable.

Partie A : étude graphique

On a représenté la fonction f sur le graphique ci-dessous.



- 1 La tangente au point d'abscisse 3 à la courbe représentative de f passe par les points $A(3;4)$ et $B(4;0)$. Déterminer $f'(3)$.
- 2 D'après le graphique ci-dessus, donner le tableau de signes de f' sur l'intervalle $[0,7;6]$.

Partie B : étude théorique

On admet que la fonction f est définie par :

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{-2x+6}$$

- 1 Montrer que : $f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4) \cdot e^{-2x+6}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .
- 2 Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,7;6]$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,7;6]$.
On ne demande pas de calculer les ordonnées.
- 3 À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés.

L1	$f'(x) := (-2x^2 + 6x - 4) \cdot e^{-2x+6}$ $\mapsto f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6}$
L2	$g(x) := \text{Dérivée}[f'(x)]$ $\mapsto g'(x) = -16xe^{-2x+6} + 4x^2e^{-2x+6} + 14e^{-2x+6}$
L3	$\text{Factoriser}[g(x)]$ $\mapsto 2e^{-2x+6}(2x^2 - 8x + 7)$
L4	$\text{Résoudre}[g(x)=0]$ $\mapsto \left\{ x = \frac{-\sqrt{2}+4}{2} ; x = \frac{\sqrt{2}+4}{2} \right\}$
L5	$F(x) := \text{Primitive}[f(x)]$ $\mapsto F(x) = \frac{1}{4}(-2x^2 + 2x - 1)e^{-2x+6}$

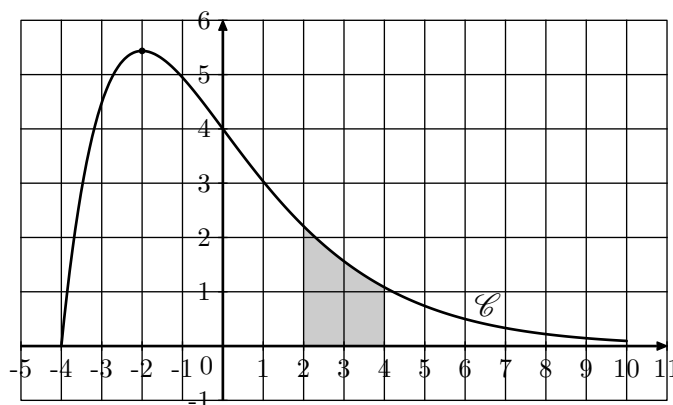
- a Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est concave.
- b La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion? Si oui, en donner l'abscisse.
- c On pose $I = \int_3^5 f(x) dx$. Calculer la valeur exacte de I puis la valeur arrondie à 10^{-1} .

4. Intégrales, théorème des valeurs intermédiaires et convexité

E.6 La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4;10]$. On note f' la fonction dérivée de f , et f'' sa dérivée seconde.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse -2 est parallèle à l'axe des abscisses.

Le domaine $\mathcal{S}$ grisé sur la figure est le domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x=2$ et la droite d'équation $x=4$.



Partie A

- 1 Déterminer, en la justifiant, la valeur de $f'(-2)$.
- 2 Par une lecture graphique, quel semble être le signe de $f'(4)$?
- 3 Déterminer, par une lecture graphique, un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire du domaine $\mathcal{S}$ grisé

sur la figure.

Partie B

La fonction f précédente est définie sur l'intervalle $[-4; 10]$
par : $f(x) = (x + 4) \cdot e^{-0,5x}$

- 1 a Montrer que : $f'(x) = (-0,5 \cdot x - 1) \cdot e^{-0,5x}$
 - b Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-4; 10]$.
 - c Montrer que sur l'intervalle $[1; 6]$, l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution.
On notera α cette unique solution.
 - d Donner de α , arrondie à 10^{-2} de α .
- 2 On admet que la dérivée seconde de f est définie par :

$$f''(x) = 0,25 \cdot x \cdot e^{-0,5x}$$

- a Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-4; 10]$.
 - b En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion I dont on calculera les coordonnées.
- 3 a On considère la fonction F définie par :
 $F(x) = (-2x - 12) \cdot e^{-0,5x}$
Comment peut-on montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle $[-4; 10]$? *On ne demande pas d'effectuer cette vérification.*
- b Calculer : $\mathcal{S} = \int_2^4 f(x) \, dx$.
On en donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.