Terminale Option Complémentaire / Annales suites

1. Seuil

E.1 Le 1er septembre 2015, un ensemble scolaire compte 3 000 élèves.
Une étude statistique interne a montré que chaque 1er septembre :

- 10 % de l'effectif quitte l'établissement ;
- 250 nouveaux élèves s'inscrivent.

On cherche à modéliser cette situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre d'élèves le 1er septembre de l'année $2015+n$.

1. Justifier qu'on peut modéliser la situation avec la suite (u_n) telle que $u_0=3\,000$ et, pour tout entier naturel n :
   $u_{n+1}=0{,}9\cdot u_n+250$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n=u_n-2\,500$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9. Préciser v_0.
   b. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   En déduire que pour tout entier naturel n :
   $u_n=500\times0{,}9^n+2\,500$
3. Démontrer que pour tout entier naturel n :
   $u_{n+1}-u_n=-50\times0{,}9^n$.
   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. La capacité optimale d'accueil est de 2 800 élèves. Ainsi, au 1er septembre 2015, l'ensemble scolaire compte un sureffectif de 200 élèves.

   Écrire un algorithme permettant de déterminer à partir de quelle année, le contexte restant le même, l'ensemble scolaire ne sera plus en sureffectif.

E.2

Soit la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 150$ et pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = 0{,}8\cdot u_n + 45$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici deux propositions d'algorithmes :

Algorithme 1

```
u ← 150
n ← 0
Tant que  u⩾220
    u ← 0,8× u+45
    n ←  n+1
Fin Tant que
```

Algorithme 2

```
u ← 150
n ← 0
Tant que  u<220
    u ← 0,8× u+45
    n ←  n+1
Fin Tant que
```

On s'intéresse à la valeur de la variable **n** à la fin de l'exécution de l'algorithme.

   a. Un seul de ces algorithmes permet, en fin d'exécution, d'affecter à la variable **n** le plus petit entier naturel n tel que $u_n\geqslant220$.
   Préciser lequel en justifiant pourquoi l'autre algorithme ne le permet pas.
   b. Quelle est la valeur numérique de la variable **n** en fin d'exécution de l'algorithme?
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :
   $v_n = u_n - 225$
   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n :
   $u_n = 225 - 75\times0{,}8^n$
4. Une petite ville de province organise chaque année une course à pied dans les rues de son centre. En 2015, le nombre de participants à cette course était de 150.

   On fait l'hypothèse que d'une année sur l'autre :

   - 20 % des participants ne reviennent pas l'année suivante ;
   - 45 nouveaux participants s'inscrivent à la course.

   La petite taille des ruelles du centre historique de la ville oblige les organisateurs à limiter le nombre de participants à 250.

   Vont-ils devoir refuser des inscriptions dans les années à venir? Justifier la réponse.

2. Limites

E.3 Une grande université, en pleine croissance d'effectifs, accueillait 27 500 étudiants en septembre 2016.
Le président de l'université est inquiet, car il sait que, malgré une gestion optimale des locaux et une répartition des étudiants sur les divers sites de son université, il ne pourra pas accueillir plus de 33 000 étudiants.
Une étude statistique lui permet d'élaborer un modèle de prévisions selon lequel, chaque année :

- 150 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire *(entre le 1er septembre et le 30 juin)* ;
- les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'étudiants estimé selon ce modèle à la rentrée de septembre $2016+n$, on a donc $u_0=27\,500$.

1. a. Estimer le nombre d'étudiants en juin 2017.
   b. Estimer le nombre d'étudiants à la rentrée de septem-

bre 2017.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_{n+1} = 1{,}04 \cdot u_n - 156$

3. Recopier et compléter les lignes ℓ.3, ℓ.4, ℓ.5 et ℓ.7 de l'algorithme suivant afin qu'à la fin de son exécution, la variable **n** ait pour valeur l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

```
ℓ.1    n ← 0
ℓ.2    u ← 27 500
ℓ.3    Tant que  u⩽...
ℓ.4        n ← ...
ℓ.5        u ← ...
ℓ.6    Fin Tant que
ℓ.7    n ←  2017+...
```

4. a. On fait fonctionner cet algorithme pas à pas.
Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant le nombre nécessaire de colonnes ; on arrondira les valeurs de U à l'unité.

	Intialisation	Etape 1	...
Valeur de n	0	...	...
Valeur de U	27 500	...	...

b. Donner la valeur affectée à la variable **n** à la fin de l'exécution de cet algorithme.

5. On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3\,900$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n :
$u_n = 23\,600 \times 1{,}04^n + 3\,900$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

E.4 Un particulier possède une piscine et décide de s'équiper d'un système automatique de remplissage pour tenir compte de l'évaporation pendant la période estivale. Sur un site spécialisé, il apprend que les conditions climatiques dans sa région pendant cette période sont tells qu'il peut prévoir une évaporation quotidienne de 4 % de la quantité d'eau. Il décide alors de régler son système de remplissage automatique à un apport de $2\,m^3$ d'eau par jour.

Le premier jour de la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage, la piscine contient $75\,m^3$.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le volume d'eau dans la piscine, exprimé en mètre cube (m^3), n jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage. Ainsi, $u_0 = 75$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Justifier que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
Est-elle géométrique?

3. Justifier que, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = 0{,}96 \times u_n + 2$

4. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 50$

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme v_0.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

c. En déduire que pour tout entier naturel n :
$u_n = 25 \times 0{,}96^n + 50$

d. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Si le volume d'eau dans la piscine est inférieur à $65\,m^3$, le niveau de l'eau est insuffisant pour alimenter les pompes de filtration ce qui risque de les endommager. Pour connaître le nombre de jours pendant lesquels le niveau d'eau reste suffisant sans risquer de panne en conservant ce réglage, on construit l'algorithme suivant :

```
ℓ.1    n ← 0
ℓ.2    u ← 75
ℓ.3    Tant que u...
ℓ.4        u ← ...
ℓ.5        n ←  n+1
ℓ.6    Fin Tant que
```

On souhaite qu'à la fin de son exécution, la variable **n** contienne le nombre de jours pour que le niveau d'eau soit suffisant.

a. Recopier et compléter les lignes ℓ.3 et ℓ.4 de cet algorithme.

b. Quelle est la valeur affectée à la variable **n** en fin d'exécution de l'algorithme?

c. Pendant combien de jours le niveau de l'eau est-il suffisant si on conserve ce réglage?

3. *Résolution d'inéquations*

E.5 La renouée du Japon est une plante à croissance très rapide et très invasive.
Un jardinier souhaite faire disparaître de son terrain cette espèce qui occupe une superficie de $120\,m^2$ au 1er janvier 2017.
Pour cela, chaque année au printemps, il procède à un arrachage qui permet de réduire de 10 % la superficie de terrain envahi l'année précédente. Cependant, cette espèce de plante ayant une puissance de dissémination très importante, de nouvelles pousses apparaissent chaque été et envahissent une nouvelle parcelle de terrain d'une superficie de $4\,m^2$.

1. Déterminer la superficie de terrain envahi par cette plante au 1er janvier 2018.

On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente la superficie de terrain en m^2 envahi par la Renouée du Japon au 1er janvier de l'année $2017+n$.

La suite (u_n) est donc définie par $u_0 = 120$ et, pour tout entier naturel n, par :
$u_{n+1} = 0{,}9 \cdot u_n + 4$

2. Le jardinier souhaite connaître l'année à partir de laquelle il aura réduit au moins de moitié la superficie de terrain envahi par rapport au 1er janvier de l'année 2017.

Recopier et compléter les lignes $\ell.1$, $\ell.3$, $\ell.4$ et $\ell.7$ de l'algorithme ci-dessous afin qu'à la fin de son exécution, la variable `u` ait pour valeur l'année souhaitée.

On ne demande pas de faire fonctionner l'algorithme

```
ℓ.1    u ← ...
ℓ.2    n ← 0
ℓ.3    Tant que ...
ℓ.4         u ← ...
ℓ.5         n ←  n+1
ℓ.6    Fin tant que
ℓ.7    n ← ...
```

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 40$
   - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ et préciser le premier terme.
   - b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
   - c. Justifier que $u_n = 80\times 0{,}9^n + 40$ pour tout entier naturel n.
4. a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation :
   $80\times 0{,}9^n + 40 \leqslant 60$
   - b. En déduire l'année à partir de laquelle la superficie envahie par la plante sera réduite au moins de moitié par rapport au 1er janvier de l'année 2017.
5. Le jardinier arrivera-t-il à faire disparaître complétement la plante de son terrain? Justifier la réponse.

4. *Sommes des termes*

E.6 Lors d'un jeu, Marc doit répondre à la question suivante :

Le premier jour, nous vous offrons 100 € puis chaque jour suivant, nous vous offrons 5 % de plus que la veille et une somme fixe de 20 €.
Au bout de combien de jours aurez-vous gagné 10 000 €?

1. Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le montant total en € versé à Marc le n-ième jour. Ainsi, $u_1 = 100$.
   - a. Calculer u_2.
   - b. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul :
     $u_{n+1} = 1{,}05\cdot u_n + 20$
2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = u_n + 400$.
   - a. Calculer v_1.
   - b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.
   - c. Exprimer v_n en fonction de n, puis en déduire que :
     $u_n = 500\times 1{,}05^{n-1} - 400$
   - d. Déterminer, en fonction de n, la somme :
     $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.
3. Quelle réponse Marc doit-il donner?

