Terminale Option Complémentaire / Continuité, dérivabilité, limites

1. Etude de fonctions

E.1 On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :

$g(x) = -0{,}6\cdot x + 4 + \mathrm{e}^{-x+5}$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[1\,;15]$ et on note g' sa fonction dérivée :

1. a. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;15]$.
   b. En déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1\,;15]$.
2. a. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;15]$, en précisant les valeurs $g(1)$ et $g(15)$ arrondies à l'unité.
   b. Le tableau de variations permet d'affirmer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;15]$.
   Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.
   c. Déduire des questions précédentes le tableau de signes de $g(x)$ sur l'intervalle $[1\,;15]$.

2. Théorème des valeurs intermédiaires

E.2 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20\,;20]$ par :

$f(x) = \big(-2\cdot x + 30\big)\cdot \mathrm{e}^{0,2\cdot x-3}$

1. a. Montrer que $f'(x)=\big(-0{,}4\cdot x+4\big)\cdot \mathrm{e}^{0,2\cdot x-3}$ pour tout réel x de l'intervalle $[-20\,;20]$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-20\,;20]$. On précisera la valeur exacte du maximum de f.
2. a. Montrer que, sur l'intervalle $[-20\,;20]$, l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α.
   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

E.3 On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de $[-3\,;2]$ par :

$f(x) = \big(-x^2 + 2{,}5\cdot x - 2\big)\cdot \mathrm{e}^{x} + 5$

1. Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;2]$:
   $f'(x) = \big(-x^2 + 0{,}5\cdot x + 0{,}5\big)\cdot \mathrm{e}^{x}$
2. Étudier le signe de f' puis dresser le tableau de variations de f sur $[-3\,;2]$.
3. a. Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[1\,;2]$.
   b. Donner la valeur de α arrondie au centième.

3. Théorème des valeurs intermédiaires et quotient

E.4 On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1\,;25]$ par : $f(x) = 10 - \dfrac{\mathrm{e}^{0,2x+1}}{x}$

Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants que l'on pourra utiliser :

f(x):10-e^(0.2x+1)/x

$$x \longmapsto 10 - \frac{\exp(0.2x+1)}{x}$$

factoriser(deriver(f(x)))

$$\frac{\exp\left(0.2\cdot x+1\right)\cdot\left(1-0.2\cdot x\right)}{x^2}$$

factoriser(deriver(deriver(f(x))))

$$\frac{\exp\left(0.2\cdot x+1\right)\cdot\left(-x^2+10\cdot x-50\right)}{25\cdot x^3}$$

1. Retrouver par le calcul l'expression factorisée de $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.
2. Étudier le signe de f' sur l'intervalle $[1\,;25]$ et dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[1\,;25]$. On arrondira les valeurs au millième.
3. On s'intéresse à l'équation $f(x)=0$.
   a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[1\,;5]$.
   b. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[5\,;25]$.
   c. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution α

4. Introduction aux valeurs intermédiaires

E.5 On considère une fonction f qui admet le tableau de variations suivant :

x	-5		1		5		10
Variation de f	4	↘	-6	↗	-1	↘	-13

1. Justifier que l'équation $f(x)=7$ n'admet aucune solution.
2. Sans justification, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $[-5\,;10]$.

E.6 On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ admettant le tableau de variations suivant :

x	-4		2		4
Variation de f	3	↘	$-\frac{9}{2}$	↗	-1

Aucune justification aux réponses n'est attendue.

1. Combien de solutions possède l'équation $f(x)=0$?
2. Discuter du nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ en fonction des valeurs suivantes de m :

   a. $f(x)=-6$ b. $f(x)=-4$ c. $f(x)=2$

E.7 On considère une fonction f définie sur $[-5\,;3[\cup]3\,;10]$ et dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-5		3	3		4		10
Variation de f	-5	↗	-1	7	↘	1	↗	2

Sans justification, donner le nombre de solutions de l'équation : $f(x)=0$.

E.8 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x)=2{\cdot}x^3-3{\cdot}x^2-12{\cdot}x+1$$

1. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;3]$.
2. Sans justification, donner le nombre de solutions de chacune des équations suivantes sur l'intervalle $[-2\,;3]$:

   a. $f(x)=-10$ b. $f(x)=15$ c. $f(x)=-6$

E.9 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ dont nous avons des résultats partiels de son étude via un logiciel de calcul formel :

L1	f(x) :=...... $f(x)=\ldots\ldots$
L2	g(x) :=Dérivée[f(x)] $g(x)=\dfrac{-5{\cdot}x^2-3{\cdot}x+2}{2{\cdot}\sqrt{x}}$
L3	Résoudre[f(x)=0] $\{x=0\ ;\ x=1\}$
L4	Résoudre[g(x)=0] $\left\{x=\frac{2}{5}\right\}$

Parmi les tableaux de variations ci-dessous, un seul est le tableau de variations de la fonction f. Lequel?

a.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	-1	↗	2	↘	1

b.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	-3	↗	2	↘	-2

c.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	-2	↗	3	↘	1

d.

x	0		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{5}$	↘	-2

e.

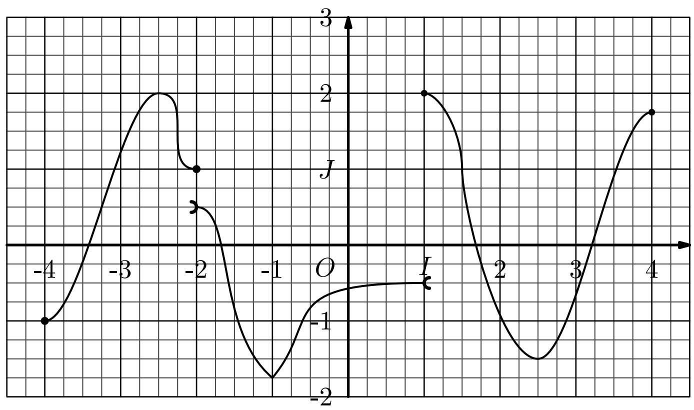
x	0		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	-2	↗	1

f.

x	0		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	-5	↗	-2

5. *Introduction à la continuité*

E.10 Ci-dessous est donnée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f



(1) Donner les intervalles sur lesquels la fonction f est continue.

(2) Donner les intervalles sur lesquels la fonction f est monotone.

E.11 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x^2 - 4\cdot x + 3}$$

(1) (a) Déterminer les images de 0 et de 2 par la fonction f.

(b) Pour l'équation $f(x)=0$, conjecturer l'existence ou non de solution pour cette équation sur l'intervalle $[0\,;2]$.

(2) (a) À l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction f.

(b) La fonction f admet-elle des antécédents de 0 dans l'intervalle $[0\,;2]$.

6. *Théorème des valeurs intermédiaires*

E.12 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;1]$:

x	-3		-1		0		1
Variation de f	-6	↗	-1	↘	-2	↗	4

Déterminer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant la réponse :

- **Proposition :** l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-3\,;1]$.

E.13 On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1\,;3]$:

x	-1		1		2		3
Variation de f	-2	↗	2	↘	-1	↗	$-0{,}5$

Parmi les quatre propositions suivantes, laquelle est correcte?

Dans l'intervalle $[-1\,;3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet :

(a) exactement 3 solutions (b) exactement 2 solutions

(c) exactement 1 solution (d) pas de solution

E.14 On considère la fonction f définie par :
$f(x) = 2\cdot x^3 + 3\cdot x^2 - 12\cdot x + 4$

(1) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

(2) (a) Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[-2\,;1]$.

(b) À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée au centième de la solution α.

E.15 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{3\cdot x + 4}{x^2 + 1}$$

(1) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(2) (a) Justifier que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[-3\,;\frac{1}{3}\right]$.

(b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur approchée au centième près de cette solution.

E.16 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{4\cdot x + 3}{x^2 + 1}$$

(1) (a) Établir que la fonction f', dérivée de la fonction f, admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{-4\cdot x^2 - 6\cdot x + 4}{(x^2+1)^2}$$

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[-5\,;5]$

(2) (a) Justifier que l'équation $f(x)=3$ admet deux solutions, notées α et β, sur l'intervalle $[-5\,;5]$.

(b) Donner les valeurs approchées de α et β au millième près.

E.17 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{2\cdot x + 1}{x^2 + 2}$$

(1) (a) Justifier que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{-2\cdot x^2 - 2\cdot x + 4}{(x^2+2)^2}$$

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-3\,;3]$.

(2) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $[-3\,;3]$

E.18 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :
$f(x)=(x-1)\cdot\sqrt{x}$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés :

L1	f(x) :=(x-1)*$\sqrt{(x)}$ $f(x)=(x-1)\cdot\sqrt{x}$
L2	g(x) :=Dérivée[f(x)] $g(x)=\dfrac{3\cdot x-1}{2\cdot\sqrt{x}}$
L3	Résoudre[f(x)=0] $\{x=1\}$
L4	Résoudre[g(x)=0] $\left\{x=\dfrac{1}{3}\right\}$

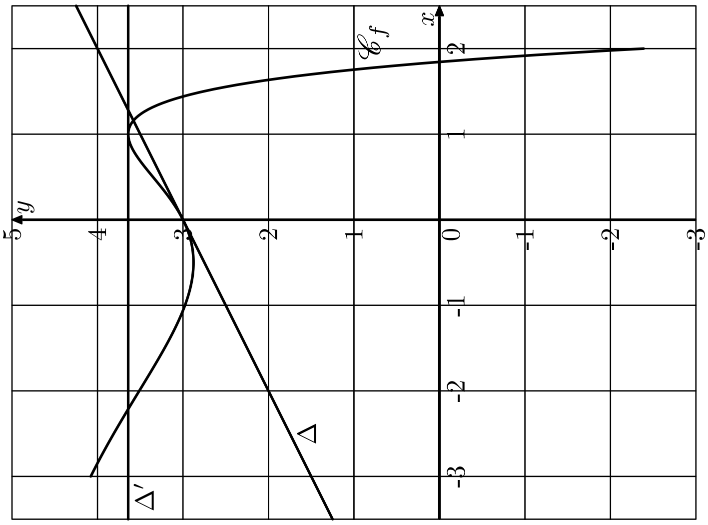
1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2. a. Déterminer les images de $\dfrac{1}{3}$ et 9 par la fonction f.

   b. En déduire que l'équation $f(x)=6$ admet une unique solution sur $\left[\dfrac{1}{3};9\right]$. Puis, justifier que cette équation admet également une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.

   c. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur exacte de l'unique solution de l'équation $f(x)=6$.

E.19 On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3;2]$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Le point A de coordonnées $(0;3)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
B est le point d'abscisse 1 appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$.



On dispose des informations suivantes :

- la fonction f est strictement décroissante sur les intervalles $[-3;-0{,}5]$ et $[1;2]$ et elle est strictement croissante sur $[-0{,}5;1]$;
- la fonction f' est strictement décroissante sur les intervalles $[-3;-2]$ et $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ et elle est strictement croissante sur $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$;
- la droite Δ d'équation $y=0{,}5\cdot x+3$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A ;
- La tangente Δ' à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

Chaque réponse devra être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte pas de points.

1. Donner la valeur de $f'(1)$.
2. Quel est le signe de $f'(2)$?
3. Donner la valeur de $f'(0)$.
4. Donner le nombre de solutions de l'équation $f'(x)=0{,}5$.

7. *Fonctions dérivées et théorème de valeurs intermédiaires*

E.20 On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la fonction dérivée admet le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

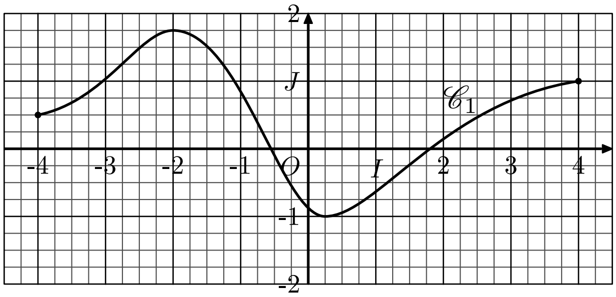
De plus, l'équation $f(x)=0$ admet pour ensemble de solutions : $\mathcal{S}=\{3\}$

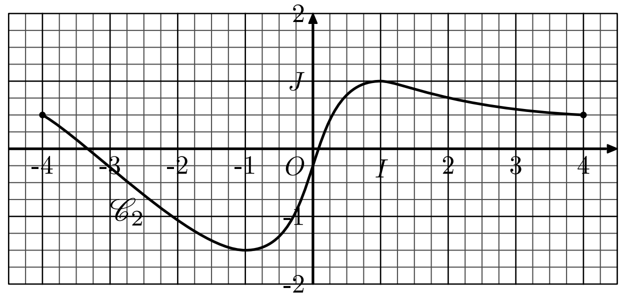
Dresser le tableau de signes en justifiant votre démarche.

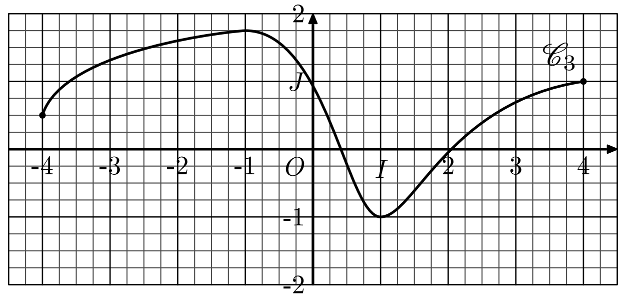
E.21 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ dont la fonction dérivée f' admet le tableau de variations ci-dessous :

x	-4	-1	1	4
Variation de f'	$0{,}5$ ↘	$-1{,}5$ ↗	1 ↘	$0{,}5$

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthogonal, sont représentées les courbes représentatives $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ de trois fonctions.







Parmi ces courbes une seule est la représentation de la fonction f. Laquelle? Justifier votre réponse.

8. *Exercices non-classés*

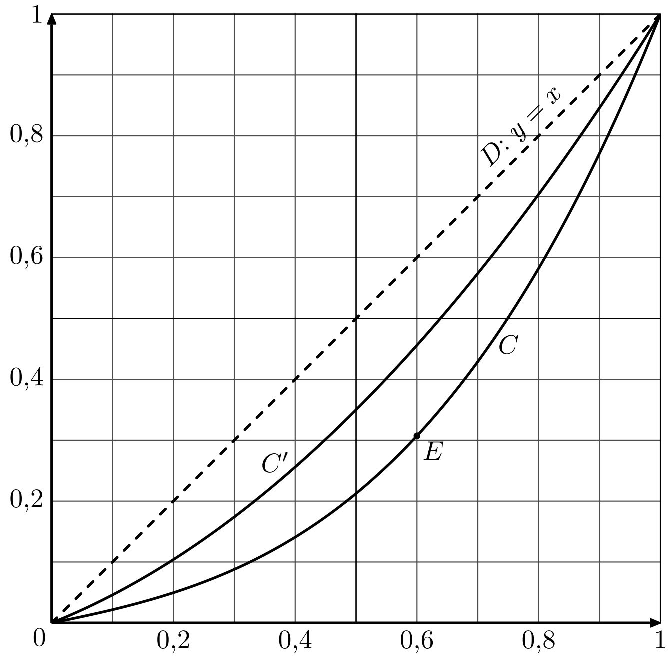
E.22 Un cabinet d'audit a été chargé d'étudier la répartition des salaires dans deux filiales d'une entreprise, appelés A et B. Pour l'étude, les salaires sont classés par ordre croissant.

Le cabinet d'audit a modélisé la répartition de salaires par la fonction u pour la filiale A et par la fonction v pour la filiale B.

Les fonctions u et v sont définies sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$u(x)=0{,}6{\cdot}x^2+0{,}4{\cdot}x \quad ; \quad v(x)=0{,}7{\cdot}x^3+0{,}1{\cdot}x^2+0{,}2{\cdot}x$$

On a tracé ci-dessous les courbes représentatives C et C' des fonctions u et v.



1) Déterminer la courbe représentative de la fonction u en justifiant la réponse.

2) Lorsque x représente un pourcentage de salariés, $u(x)$ et $v(x)$ représentent le pourcentage de la masse salariale que se partagent ces salariés dans leurs filiales respectives.

Exemple : pour la courbe C, le point $E(0{,}60\,;0{,}3072)$ signifie que 60 % des salariés ayant les plus bas salaires se partagent 30,72 % de la masse salariale.

a) Calculer le pourcentage de la masse salariale que se répartissent les 50 % des salariés de la filiale A ayant les plus bas salaires.

b) Pour les 50 % des salariés ayant les plus bas salaires, laquelle des filiales, A ou B, distribue la plus grande part de la masse salariale?

c) Quelle filiale parait avoir une distribution des salaires la plus inégalitaire?

E.23 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=x{\cdot}e^x-e^x-1$

1) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty]$

2) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution, notée α, dans $[0\,;2]$.

b) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement à l'unité de α.

3) En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[0\,;+\infty]$.