Terminale Option Complémentaire / Continuité, dérivabilité, limites

1. Etude de fonctions

E.1 On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :

$$g(x) = -0{,}6\cdot x + 4 + \mathrm{e}^{-x+5}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[1\,;15]$ et on note g' sa fonction dérivée :

1. a. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;15]$.
   b. En déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1\,;15]$.
2. a. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;15]$, en précisant les valeurs $g(1)$ et $g(15)$ arrondies à l'unité.
   b. Le tableau de variations permet d'affirmer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;15]$.
   Donner une valeur approchée de α à $0{,}1$ près.
   c. Déduire des questions précédentes le tableau de signes de $g(x)$ sur l'intervalle $[1\,;15]$.

2. Théorème des valeurs intermédiaires

E.2 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20\,;20]$ par :

$$f(x) = (-2\cdot x + 30)\cdot\mathrm{e}^{0,2\cdot x-3}$$

1. a. Montrer que $f'(x)=(-0{,}4\cdot x+4)\cdot\mathrm{e}^{0,2\cdot x-3}$ pour tout réel x de l'intervalle $[-20\,;20]$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-20\,;20]$. On précisera la valeur exacte du maximum de f.
2. a. Montrer que, sur l'intervalle $[-20\,;20]$, l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α.
   b. Donner un encadrement de α d'amplitude $0{,}1$.

3. Théorème des valeurs intermédiaires et quotient

E.3 On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1\,;25]$ par :

$$f(x) = 10 - \frac{\mathrm{e}^{0,2x+1}}{x}$$

Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants que l'on pourra utiliser :

f(x):10-e^(0.2x+1)/x

$$x \longmapsto 10 - \frac{\exp(0.2x+1)}{x}$$

factoriser(deriver(f(x)))

$$\frac{\exp(0.2\cdot x+1)\cdot(1-0.2\cdot x)}{x^2}$$

factoriser(deriver(deriver(f(x))))

$$\frac{\exp(0.2\cdot x+1)\cdot(-x^2+10\cdot x-50)}{25\cdot x^3}$$

1. Retrouver par le calcul l'expression factorisée de $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.
2. Étudier le signe de f' sur l'intervalle $[1\,;25]$ et dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[1\,;25]$. On arrondira les valeurs au millième.
3. On s'intéresse à l'équation $f(x)=0$.
   a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[1\,;5]$.
   b. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[5\,;25]$.
   c. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution α

4. Introduction aux valeurs intermédiaires

E.4 On considère une fonction f qui admet le tableau de variations suivant :

x	-5	1	5	10
Variation de f	4 ↘	-6 ↗	-1 ↘	-13

1. Justifier que l'équation $f(x)=7$ n'admet aucune solution.

2. Sans justification, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $\left[-5\,;10\right]$.

E.5 On considère une fonction f définie sur $\left[-5\,;3\right[\cup\left]3\,;10\right]$ et dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-5		3		4		10
Variation de f	-5	↗	-1 ‖ 7	↘	1	↗	2

Sans justification, donner le nombre de solutions de l'équation : $f(x)=0$.

E.6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = 2{\cdot}x^3 - 3{\cdot}x^2 - 12{\cdot}x + 1$$

1. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

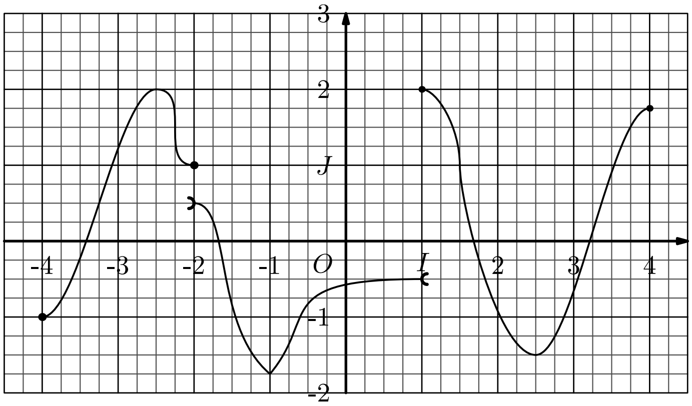
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[-2\,;3\right]$.

2. Sans justification, donner le nombre de solutions de solutions de chacune des équations suivantes sur l'intervalle $\left[-2\,;3\right]$:

   a. $f(x)=-10$ b. $f(x)=15$ c. $f(x)=-6$

5. *Introduction à la continuité*

E.7 Ci-dessous est donnée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f



1. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f est continue.

2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f est monotone.

E.8 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x^2 - 4{\cdot}x + 3}$$

1. a. Déterminer les images de 0 et de 2 par la fonction f.

   b. Pour l'équation $f(x)=0$, conjecturer l'existence ou non de solution pour cette équation sur l'intervalle $\left[0\,;2\right]$.

2. a. À l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction f.

   b. La fonction f admet-elle des antécédents de 0 dans l'intervalle $\left[0\,;2\right]$.

6. *Théorème des valeurs intermédiaires*

E.9 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $\left[-3\,;1\right]$:

x	-3		-1		0		1
Variation de f	-6	↗	-1	↘	-2	↗	4

Déterminer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant la réponse :

- **Proposition :** l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[-3\,;1\right]$.

E.10 On considère la fonction f définie par :

$f(x) = 2{\cdot}x^3 + 3{\cdot}x^2 - 12{\cdot}x + 4$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2. a. Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $\left[-2\,;1\right]$.

   b. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée au centième de la solution α.

E.11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $\quad f(x) = \dfrac{3{\cdot}x+4}{x^2+1}$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. a. Justifier que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[-3\,;\frac{1}{3}\right]$.

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur approchée au centième près de cette solution.

E.12 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{2{\cdot}x+1}{x^2+2}$$

1. a. Justifier que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :

$$f'(x) = \frac{-2{\cdot}x^2-2{\cdot}x+4}{\left(x^2+2\right)^2}$$

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[-3\,;3\right]$.

2. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $\left[-3\,;3\right]$

7. Fonctions dérivées et théorème de valeurs intermédiaires

E.13 On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la fonction dérivée admet le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

De plus, l'équation $f(x)=0$ admet pour ensemble de solutions : $\mathcal{S}=\{3\}$

Dresser le tableau de signes en justifiant votre démarche.

8. Exercices non-classés

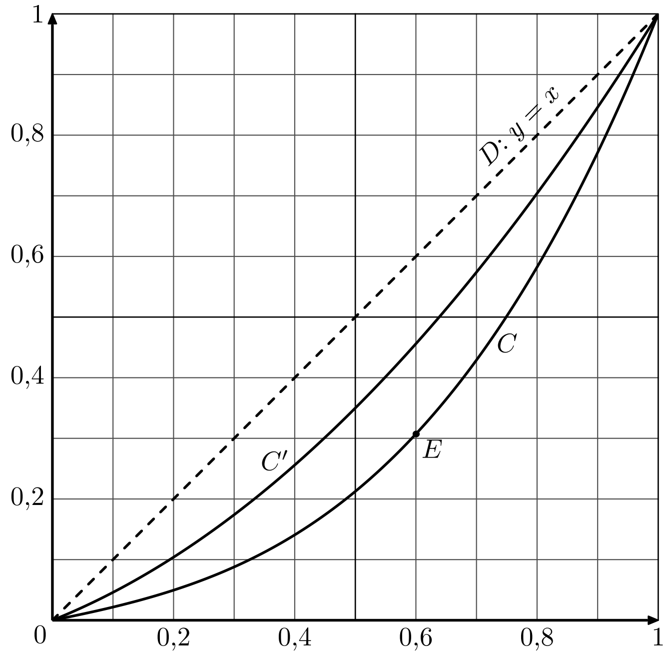
E.14 Un cabinet d'audit a été chargé d'étudier la répartition des salaires dans deux filiales d'une entreprise, appelés A et B. Pour l'étude, les salaires sont classés par ordre croissant.

Le cabinet d'audit a modélisé la répartition de salaires par la fonction u pour la filiale A et par la fonction v pour la filiale B.

Les fonctions u et v sont définies sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$ par :

$$u(x) = 0{,}6{\cdot}x^2+0{,}4{\cdot}x \quad ; \quad v(x) = 0{,}7{\cdot}x^3+0{,}1{\cdot}x^2+0{,}2{\cdot}x$$

On a tracé ci-dessous les courbes représentatives C et C' des fonctions u et v.



1. Déterminer la courbe représentative de la fonction u en justifiant la réponse.

2. Lorsque x représente un pourcentage de salariés, $u(x)$ et $v(x)$ représentent le pourcentage de la masse salariale que se partagent ces salariés dans leurs filiales respectives.

> Exemple : pour la courbe C, le point $E(0{,}60\,;0{,}3072)$ signifie que 60 % des salariés ayant les plus bas salaires se partagent 30,72 % de la masse salariale.

a. Calculer le pourcentage de la masse salariale que se répartissent les 50 % des salariés de la filiale A ayant les plus bas salaires.

b. Pour les 50 % des salariés ayant les plus bas salaires, laquelle des filiales, A ou B, distribue la plus grande part de la masse salariale?

c. Quelle filiale parait avoir une distribution des salaires la plus inégalitaire?

