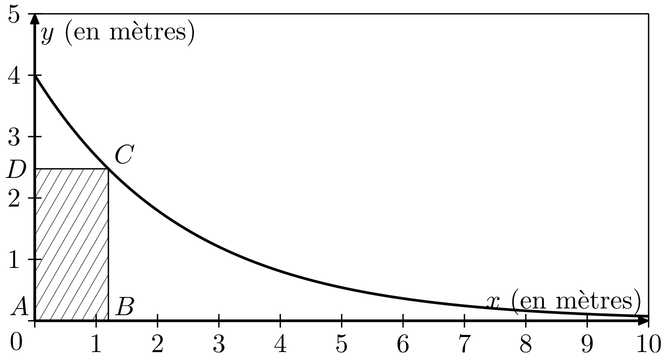
Terminale Option Complémentaire / Intégration

1. Autour des aires

E.1 Un publicitaire envisage la pose d'un panneau publicitaire rectangulaire sous une partie de rampe de skateboard. Le profil de cette rampe est modélisé par la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$f(x) = 4{\cdot}\mathrm{e}^{-0,4x}$$

Cette courbe $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère d'origine O :

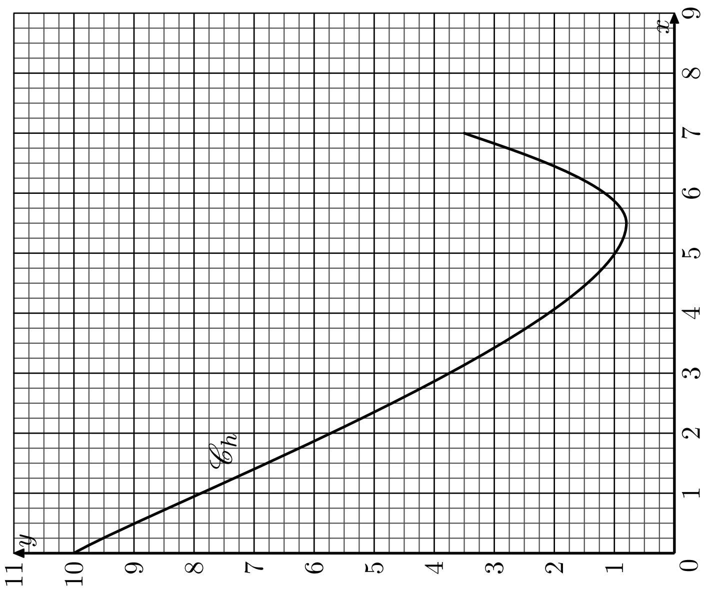


Le rectangle $ABCD$ représente le panneau publicitaire et répond aux contraintes suivantes : le point A est situé à l'origine du repère, le point B est sur l'axe des abscisses, le point D est sur l'axe des ordonnées et le point C est sur la courbe $\mathscr{C}_f$.

On suppose que le point B a pour abscisse $x=2$.
Montrer que l'aire du panneau publicitaire a une valeur de $3{,}6\,m^2$, arrondie au dixième de mètre carré près.

2. Encadrement d'aires

E.2 On considère la fonction h définie sur $[0\,;7]$ et représentée par la courbe ci-dessous :



Parmi les propositions ci-dessous, une seule est exacte. Laquelle?

a $\displaystyle\int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x = h(5)-h(0)$

b $\displaystyle 20<\int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x<30$

c $\displaystyle 15 < \int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x < 20$

d $\displaystyle\int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x = 20$

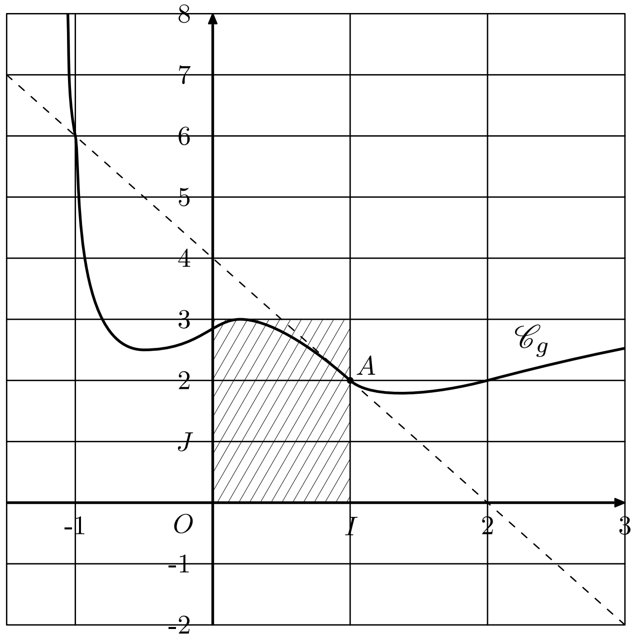
E.3

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

On rappelle que $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.
On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on rappelle que g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.

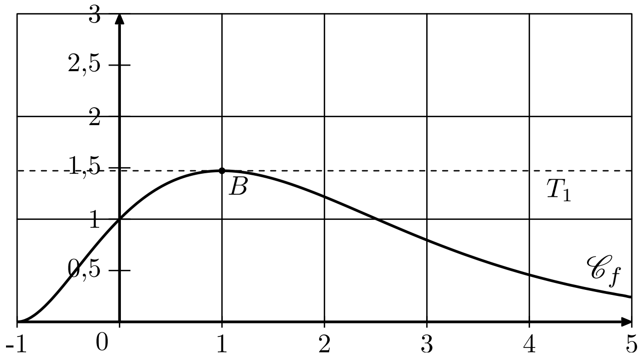
On a tracé en pointillé la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point A de cette courbe, d'abscisse 1 et d'ordonnée 2. Cette tangente coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2.



- **Affirmation 1 :** $g'(1) = -2$
- **Affirmation 2 :** $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x < 3$

E.4 Dans un repère orthonormé du plan, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\,;5]$.

On note f' la fonction dérivée de f.
La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0\,;1)$ et par le point B d'abscisse 1.
La tangente T_1 à la courbe au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



Parmi les quatre propositions ci-dessous, laquelle est correcte?

Un encadrement de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ par des entiers naturels successifs est :

a $3 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 4$

b $2 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 3$

c $1 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2$

d autre réponse

E.5 *Parmi les quatre propositions, une seule est exacte. Laquelle? Justifier votre réponse.*

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-10\,;10]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-10	-5	3	10
Variation de g	7 ↘	2 ↗	4 ↘	-6

On note $I = \displaystyle\int_{-5}^3 g(x)\,\mathrm{d}x$. On peut affirmer que :

a $-5 \leqslant I \leqslant 3$

b $2 \leqslant I \leqslant 4$

c $16 \leqslant I \leqslant 32$

d $4 \leqslant I \leqslant 8$

3. *Calcul d'intégrales et recherche de primitives*

E.6 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[3\,;13]$ par :
$f(x) = -2x + 20 - \mathrm{e}^{-2x+10}$

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_3^{13} f(x)\,\mathrm{d}x$.
On donne la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-3} près.

4. *Calcul d'intégrales : utilisation des primitives*

E.7 L'évolution de la population d'une station balnéaire pour l'été 2015 a été modélisée par une fonction f, définie sur l'intervalle $[0\,;70]$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1er juillet, $f(x)$ désigne la population en milliers d'habitants.
Ainsi, $x=30$ correspond au 31 juillet et $f(30)$ représente la population qu'il est prévu d'accueillir le 31 juillet.
On estime qu'un habitant utilisera chaque jour entre 45 et 55

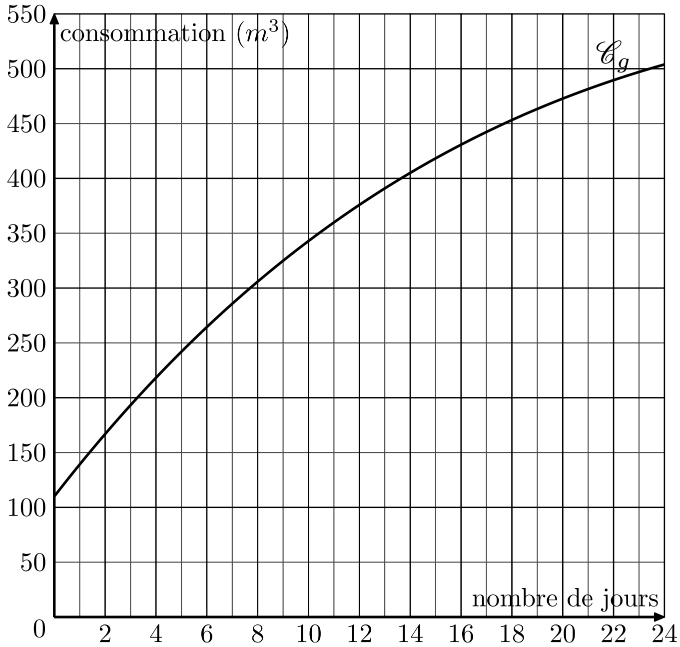
litres d'eau par jour.

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;70]$ par :
$$g(x)=110+11\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-0{,}025\cdot x+1}$$

Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1er juillet, $g(x)$ représente alors la consommation maximale d'eau prévue ce jour-là et exprimée en m^3.
Soit la fonction G définie sur l'intervalle $[0\,;70]$ par :
$$G(x)=110\cdot x-\left(440\cdot x+17\,600\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}025\cdot x+1}$$

On admet que la fonction G est une primitive de la fonction g.
La somme $S=g(10)+g(11)+g(12)+\cdots+g(20)$ représente la consommation maximale d'eau du 10e au 20e jour exprimée en m^3.

1. En l'illustrant sur la courbe $\mathscr{C}_g$ ci-dessous, donner une interprétation graphique en termes d'aires de la somme S.
2. En déduire une valeur approximative de cette quantité d'eau consommée du 10e au 20e jour.



E.8 On considère la fonction f définie sur $]0\,;15]$ par :
$$f(x)=9\cdot x^2\cdot\left(1-2\cdot\ln x\right)+10$$

On donne la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;1{,}5]$ par :
$$F(x)=10\cdot x+5\cdot x^3-6x^3\cdot\ln x$$

1. Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $]0\,;1{,}5]$.
2. Calculer $\displaystyle\int_1^{1{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   On donnera le résultat arrondi au centième.

E.9 On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;7]$ d'expression :
$$f(x)=2\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x+3}$$

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;7]$ par :
$$F(x)=\left(-2\cdot x-2\right)\cdot \mathrm{e}^{-x+3}$$

1. Justifier que F est une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;7]$.
2. Calculer la valeur exacte de l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équation $x=1$, $x=3$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.

E.10 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20\,;20]$ par :
$$f(x)=\left(-2\cdot x+30\right)\cdot \mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	Dériver$\left(-10\cdot x+200\right)\cdot \mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$ $\left(-2\cdot x+30\right)\cdot \mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$
2	Dériver$\left(2\cdot x+30\right)\cdot \mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$ $\left(-0{,}4\cdot x+4\right)\cdot \mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$
3	Dériver$\left(-0{,}4\cdot x+4\right)\cdot \mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$ $\left(-0{,}08\cdot x+0{,}4\right)\cdot \mathrm{e}^{0{,}2\cdot x-3}$

Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{10}^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$.

E.11 La fonction f précédente est définie sur l'intervalle $[-4\,;10]$ par : $f(x)=\left(x+4\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot x}$

On considère la fonction F définie par :
$$F(x)=\left(-2\cdot x-12\right)\cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot x}.$$

1. Comment peut-on montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle $[-4\,;10]$? *On ne demande pas d'effectuer cette vérification.*
2. Calculer : $\displaystyle S=\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$
   On en donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

E.12 On admet que la fonction f est définie par :
$$f(x)=\left(x^2-2\cdot x+1\right)\cdot \mathrm{e}^{-2x+6}$$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés :

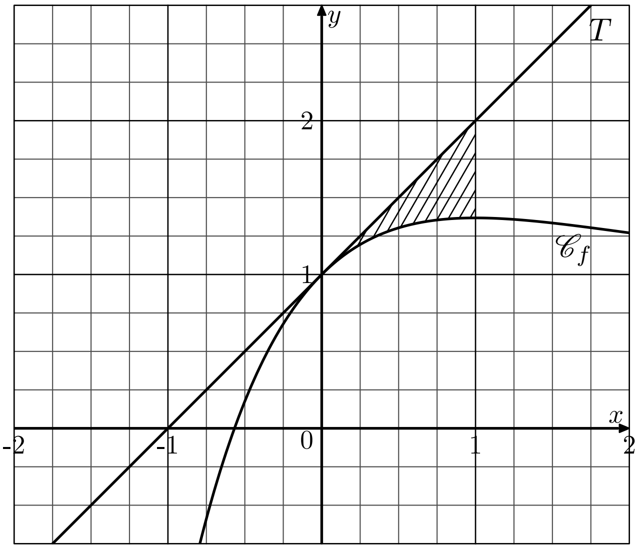
L1	`f(x):=(x^2-2x+1)*e^(-2x+6)` $\rightarrow f(x)=\left(x^2-2\cdot x+1\right)\cdot \mathrm{e}^{-2x+6}$
L2	`f'(x):=Dérivée[f(x)]` $\rightarrow f'(x)=\left(-2\cdot x^2+6\cdot x-4\right)\cdot \mathrm{e}^{-2x+6}$
L3	`g(x):=Dérivée[f'(x)]` $\rightarrow g(x)=-16\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-2x+6}+4\cdot x^2\cdot \mathrm{e}^{-2x+6}+14\cdot \mathrm{e}^{-2x+6}$
L4	`Factoriser[g(x)]` $\rightarrow 2\cdot \mathrm{e}^{-2x+6}\cdot\left(2\cdot x^2-8\cdot x+7\right)$
L5	`Résoudre[g(x)=0]` $\rightarrow \left\{x=\dfrac{-\sqrt{2}+4}{2}\,;\,x=\dfrac{\sqrt{2}+4}{2}\right\}$
L6	`F(x):=Primitive[f(x)]` $\rightarrow F(x)=\dfrac{1}{4}\cdot\left(-2\cdot x^2+2\cdot x-1\right)\cdot \mathrm{e}^{-2\cdot x+6}$

On pose $\displaystyle I=\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer la valeur exacte de I puis la valeur arrondie à 10^{-1}.

5. *Aire entre deux courbes*

E.13 On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x \cdot e^{-x} + 1$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan et f' la fonction dérivée de f.



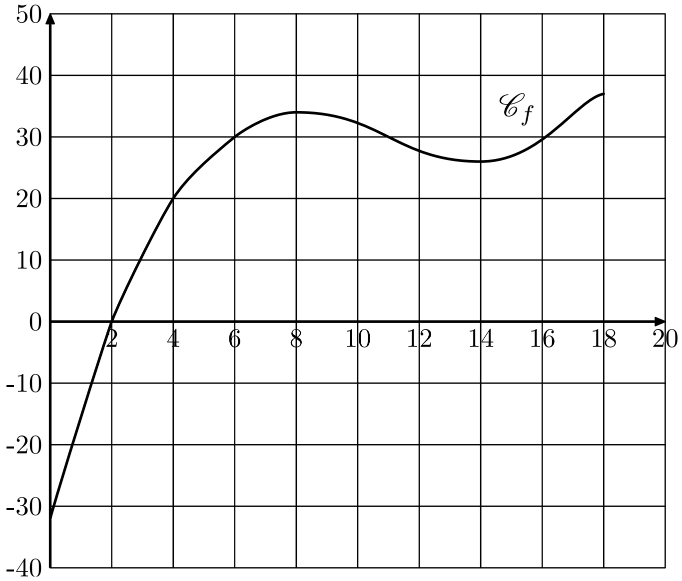
1. a. Montrer que, pour tout réel x : $f'(x) = e^{-x} \cdot (1 - x)$
   b. Montrer que l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est : $y = x + 1$.

On admet que la tangente T est située au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente T dans un repère orthonormé.
   a. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $F(x) = e^{-x} \cdot (-1 - x) + x$
   Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ puis donner le résultat arrondi à 10^{-3} près.

6. *Propriétés des primitives*

E.14 On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[0\,;18]$:



Laquelle des réponses ci-dessous est correcte?

a. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont négatives sur l'intervalle $[0\,;2]$.

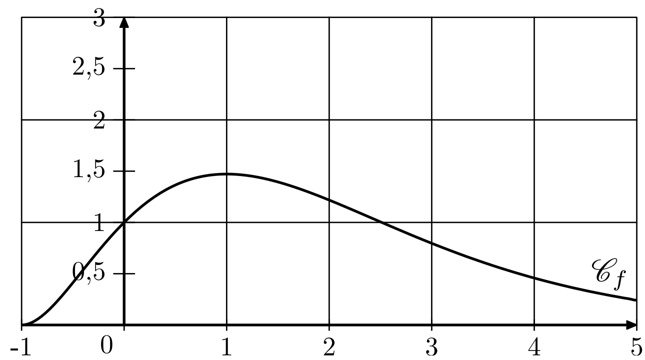
b. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont négatives sur l'intervalle $[8\,;12]$.

c. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont croissantes sur l'intervalle $[0\,;2]$.

d. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont croissantes sur l'intervalle $[8\,;12]$.

7. *Etudes de fonctions*

E.15 Dans un repère orthonormé du plan, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\,;5]$.
On note f' la fonction dérivée de f.



1. On admet que la fonction F définie sur $[-1\,;5]$ par :
$F(x) = -(x^2+4{\cdot}x+5){\cdot}\mathrm{e}^{-x}$
est une primitive de la fonction f.

a. En déduire l'expression de $f(x)$ sur $[-1\,;5]$.

b. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine du plan limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

2. Montrer que sur l'intervalle $[1\,;5]$, l'équation $f(x)=1$ admet au moins une solution.

8. *Moyenne*

E.16 Dans cet exercice, on étudie l'évolution de la dépense des ménages français en programmes audiovisuels *(redevance audiovisuelle, billets de cinémas, vidéos,...)*.

On note D_n la dépense des ménages en programmes audiovisuels, exprimée en milliards d'euros, au cours de l'année $1995+n$.

année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
n	0	1	2	3	4	5	6	7
D_n	4,95	5,15	5,25	5,4	5,7	6,3	6,55	6,9

année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
n	8	9	10	11	12	13	14	15
D_n	7,3	7,75	7,65	7,79	7,64	7,82	7,89	8,08

Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x, par :
$f(x) = -0{,}0032{\cdot}x^3 + 0{,}06{\cdot}x^2 + 5$

Pour tout entier n vérifiant $0 \leqslant n \leqslant 20$, on décide de modéliser la dépense des ménages français en programmes audiovisuels exprimée en milliards d'euros, au cours de l'année $1995+n$ par le nombre $f(n)$.

1. Calculer $f(5)$.

2. Déterminer le pourcentage p, de l'erreur commise en remplaçant D_5 par $f(5)$.

(Le pourcentage d'erreur est obtenu par le calcul $p = \frac{\textit{valeur réelle-valeur estimée}}{\textit{valeur réelle}}$ et le résultat sera donné à 0,1 % près.)

3. En utilisant la fonction f, quelle estimation de la dépense totale peut-on effectuer pour l'année 2013? *(On arrondira le résultat au centième de milliard d'euros).*

4. On veut utiliser la fonction f pour estimer la dépense moyenne des ménages entre le 1er janvier 1995 et le 1er janvier 2015.

On calcule pour cela : $M = \frac{1}{20}\cdot\int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$

a. Déterminer une primitive de F de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;20]$.

b. Calculer M.

E.17 On considère la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\,;4]$ par : $f(x) = (x+2){\cdot}\mathrm{e}^{-x+1}$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	factoriser(dériver$[-(x+1)*\exp(-x+1)]$) $x*\exp(-x+1)$
2	intégrer$[(x+2)*\exp(-x+1)]$ $-(x+3)*\exp(-x+1)$

En utilisant ces résultats, répondre aux questions suivantes :

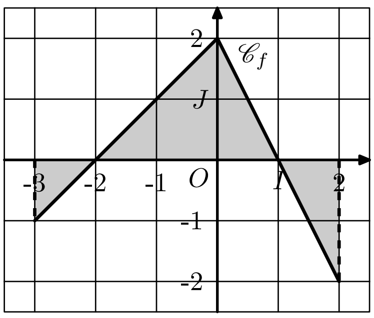
1. Montrer que : $\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = -4+\mathrm{e}^3$

2. En déduire la valeur moyenne arrondie au millième de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;1]$.

9. *Calculs d'aires*

E.18

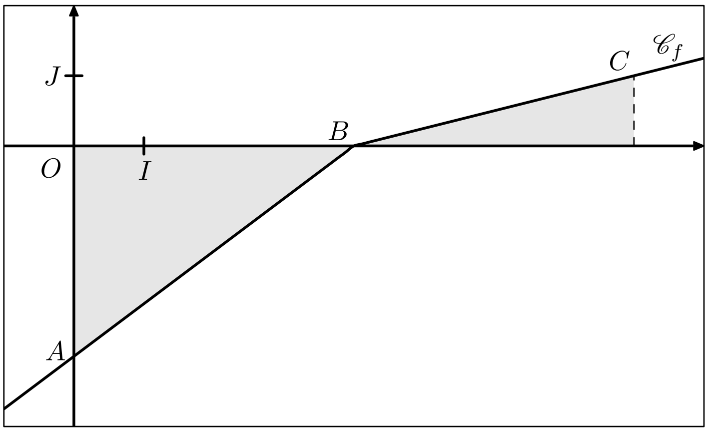
On considère la partie du plan représentée en gris ci-contre :
Déterminer l'aire de la partie grisée.



E.19 On considère la fonction f définie par morceaux par la relation ci-dessous :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{3}{4}\cdot x - 3 & \text{sur l'intervalle } \left]-\infty\,;4\right] \\ f(x) = \dfrac{1}{4}\cdot x - 1 & \text{sur l'intervalle } \left[4\,;+\infty\right[\end{cases}$$

Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



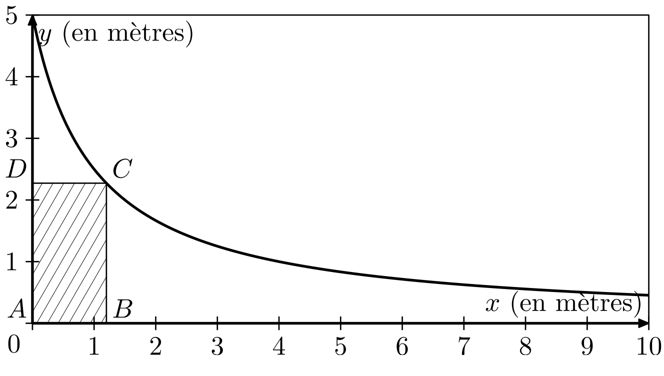
Les points A, B et C sont des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ où le point C a pour ordonnée 1.

1. Déterminer les coordonnées des points A, B et C.
2. Déterminer l'aire de la surface grisée.

E.20 Un publicitaire envisage la pose d'un panneau publicitaire rectangulaire sous une partie de rampe de skateboard. Le profil de cette rampe est modélisé par la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$f(x) = \frac{5}{x+1}$$

Cette courbe $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère d'origine O :



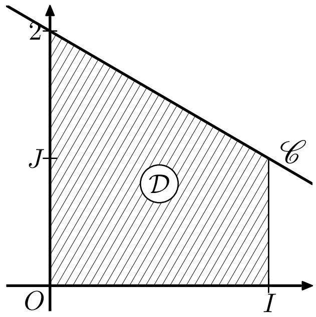
Le rectangle $ABCD$ représente le panneau publicitaire et répond aux contraintes suivantes : le point A est situé à l'origine du repère, le point B est sur l'axe des abscisses, le point D est sur l'axe des ordonnées et le point C est sur la courbe $\mathscr{C}_f$.

On suppose que le point B a pour abscisse $x=2$.
Montrer que l'aire du panneau publicitaire vaut $3{,}3\,m^2$, arrondie au mètre-carré près.

E.21 On considère la fonction f définie par :
$f(x) = 2 - x$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$.

On admet que :
$f(x) > 0$, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$.

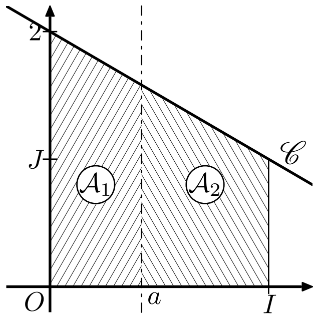
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé, et $\mathcal{D}$ le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, d'autre part entre les droites d'équations $x=0$ et $x=1$. La courbe $\mathscr{C}$ et le domaine $\mathcal{D}$ sont représentés ci-contre.



Le but de cet exercice est de partager le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées *(partie* **A***)*, puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses *(partie* **B***)*.

Partie A

Soit a un réel tel que $0 \leqslant a \leqslant 1$.
On note $\mathcal{A}_1$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox), les droites d'équations $x=0$ et $x=a$, puis $\mathcal{A}_2$ celle du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, (Ox) et les droites d'équation $x=a$ et $x=1$.
$\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont exprimées en unités d'aire.



Déterminer la valeur de a afin que les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ soient égales.

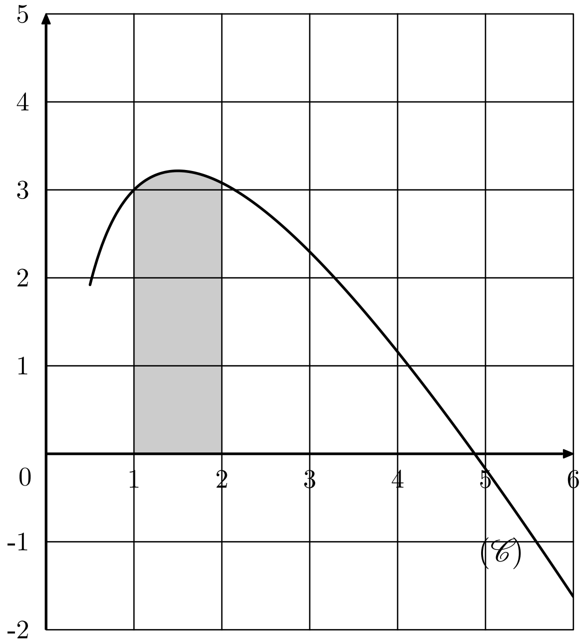
Partie B

Soit b un réel positif.
Dans cette partie, on se propose de partager le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y=b$.
On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

Déterminer la valeur de b.

10. *Encadrement de l'aire avec des rectangles*

E.22 La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0{,}5\,;6]$.

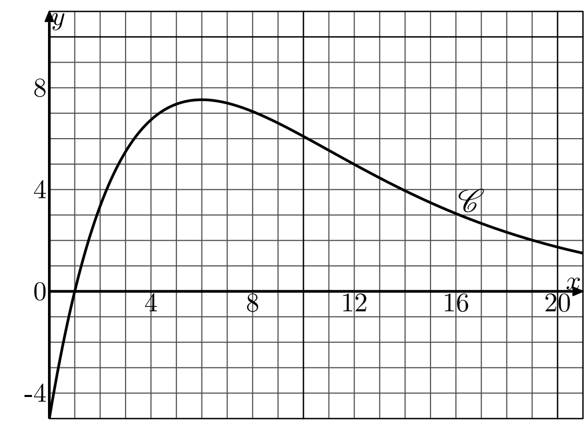


Donner un encadrement de l'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

E.23 On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;20]$.

Déterminer un encadrement, d'amplitude 4, par deux nombres entiers de :

$$I=\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$$



E.24

Parmi les quatre propositions ci-dessous, une seule est correcte. Laquelle?

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-10\,;10]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

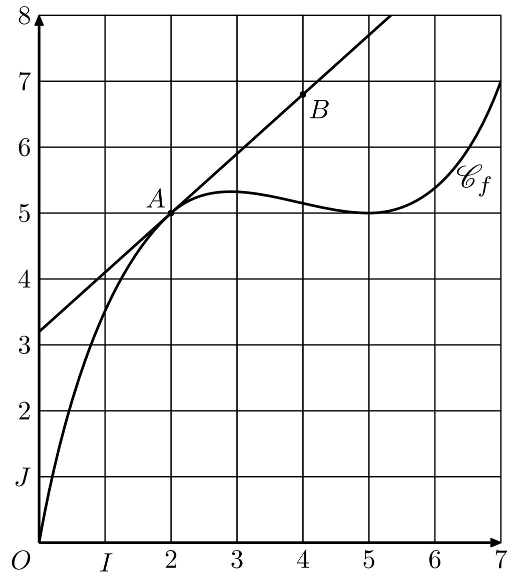
x	-10	-5	3	10
Variation de g	7	2	4	-6

On note $I=\displaystyle\int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$. On peut affirmer que :

a) $-5\leqslant I\leqslant 3$ b) $2\leqslant I\leqslant 4$

c) $16\leqslant I\leqslant 32$ d) $4\leqslant I\leqslant 8$

E.25 Sur le graphique ci-dessous est représentée la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[0\,;7]$. Les points A et B ont pour coordonnées $A(2\,;5)$ et $B(4\,;6{,}8)$. La droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.



a) La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A admet pour équation :

- **Affirmation 1 :** $y=-0{,}9{\cdot}x+6{,}8$
- **Affirmation 2 :** $y=0{,}9{\cdot}x+3{,}5$
- **Affirmation 3 :** $y=0{,}9{\cdot}x+3{,}2$
- **Affirmation 4 :** $y=1{,}8{\cdot}x+1{,}4$

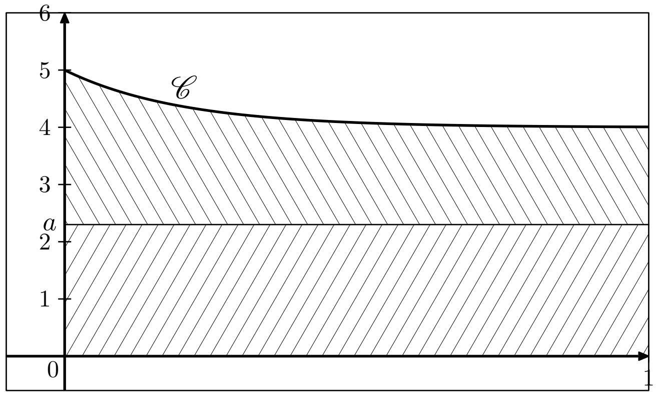
b)
- **Affirmation 1 :** $f(0)\leqslant\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant f(5)$
- **Affirmation 2 :** $2\leqslant\displaystyle\int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 7$
- **Affirmation 3 :** $18\leqslant\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 19$
- **Affirmation 4 :** $25\leqslant\displaystyle\int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 31$

E.26 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par : $f(x)=4+\mathrm{e}^{-5x}$

On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère du plan.

Le domaine $\mathcal{D}$ hachuré sur la figure est le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=1$.

On veut partager le domaine hachuré en deux domaines de même aire par une droite d'équation $y=a$, parallèle à l'axe des abscisses, selon l'exemple donné ci-dessous.

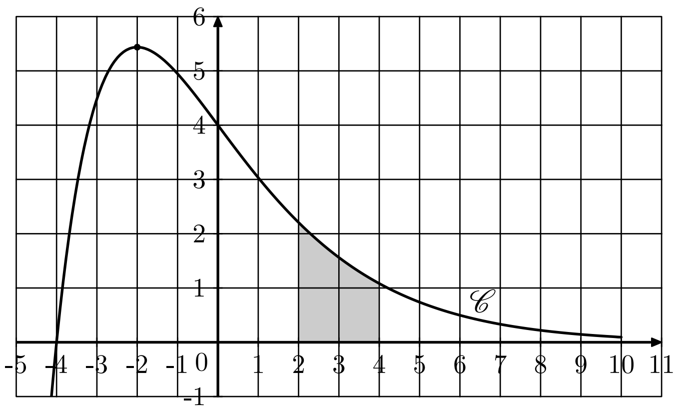


Justifier que la valeur $a=3$ ne convient pas.

11. Encadrement de l'aire avec des triangles

E.27 La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;10]$.

Le domaine $\mathcal{S}$ grisé sur la figure est le domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x=2$ et la droite d'équation $x=4$.



Déterminer, par une lecture graphique, un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire du domaine $\mathcal{S}$ grisé sur la figure.

E.28

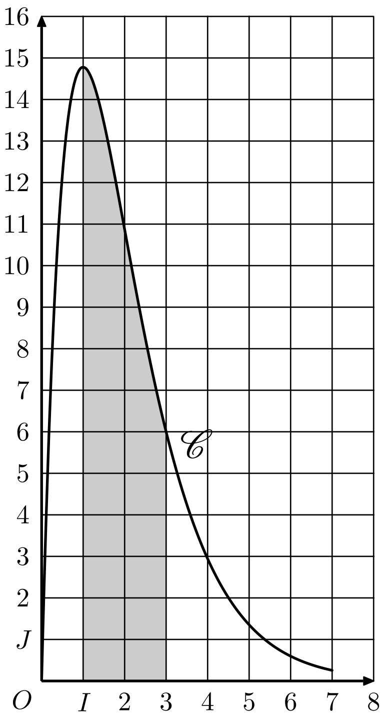
La réponse sera donnée sans justification, avec la précision permise par le graphique ci-contre :

Le graphique ci-contre présente dans un repère d'origine O la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;7]$.
La mesure de la surface grisée appartient à un seul des intervalles suivants. Lequel?

a) $[9\,;17]$

b) $[18\,;26]$

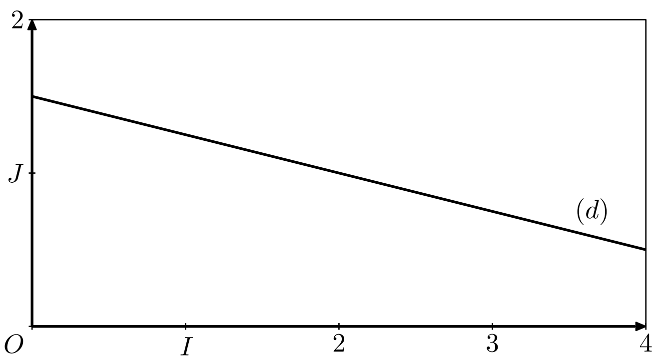
c) $[27\,;35]$



12. Introduction au calcul intégral

E.29 Ci-dessous est représentée, dans un repère $(O\,;I\,;J)$, la droite (d) admettant pour équation réduite :

(d) : $y=-0{,}25\cdot x+1{,}5$



1) a) Placer les points $A(3\,;0)$, $C(0\,;1{,}5)$ et le point B ayant pour abscisse 3 et appartenant à la droite (d).

b) Déterminer l'aire du trapèze $OABC$.

2) Pour tout réel x strictement positif, on admet que l'aire du trapèze $OMNC$ où les points M et N ont pour abscisse x et appartiennent respectivement à l'axe des abscisses et à la droite (d) est déterminée par l'image de x par la fonction F définie par :

$F(x)=-0{,}125\cdot x^2+1{,}5\cdot x$

a) Vérifier le résultat de la question 1) b).

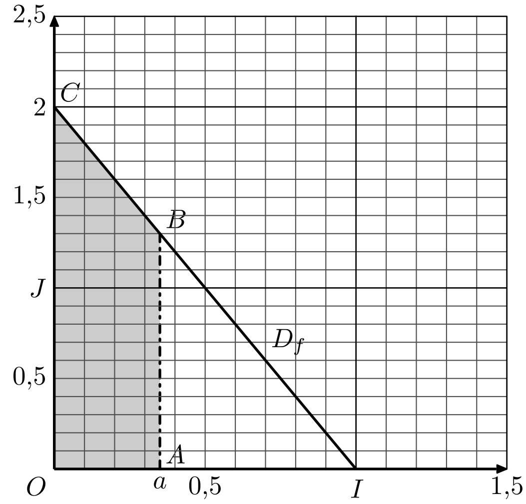
b) On considère le domaine $\mathcal{D}$ délimité par :

- la droite (d) et l'axe des abscisses ;
- les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.

À l'aide de la fonction f, déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

E.30 Soit f la fonction définie sur $\big[0\,;1\big]$ par :
$f(x) = 2 - 2{\cdot}x$

On a tracé ci-dessous la droite $\mathcal{D}_f$, représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $\big(O\,;I\,;J\big)$ du plan.
Le point C a pour coordonnées $(0\,;2)$.
Δ est la partie du plan intérieure au triangle OIC.
Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1 ; on note A le point de coordonnées $(a\,;0)$ et B le point de $\mathcal{D}_f$ de coordonnées $(a\,;f(a))$.
Le but de cet exercice est de trouver la valeur de a, telle que le segment $\big[AB\big]$ partage Δ en deux parties de même aire.
Déterminer la valeur exacte de a, puis sa valeur arrondi au centième près.

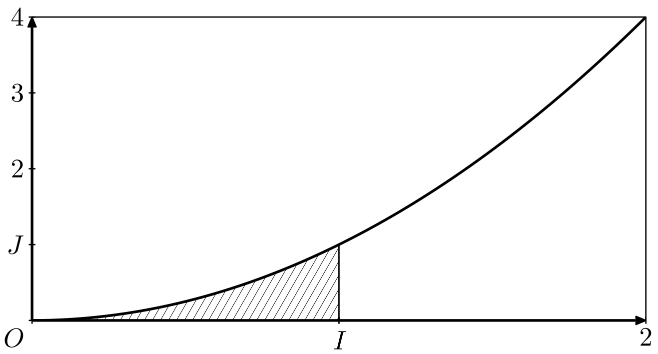


13. *Vers l'usage des primitives*

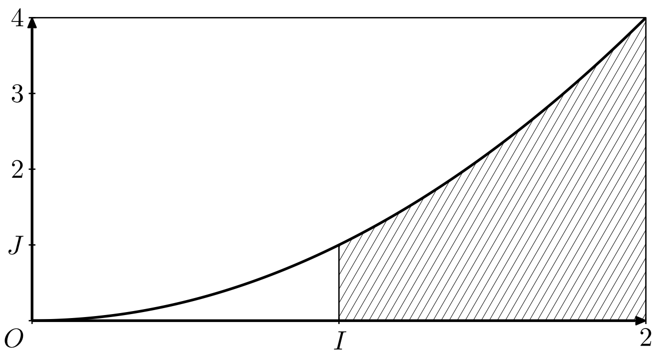
E.31 On considère la fonction carrée notée f :
$f(x) = x^2$

L'intégrale de la fonction f entre 0 et a est donnée par la formule : $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}{\cdot}a^3$

(1) Déterminer l'aire de la partie hachurée :



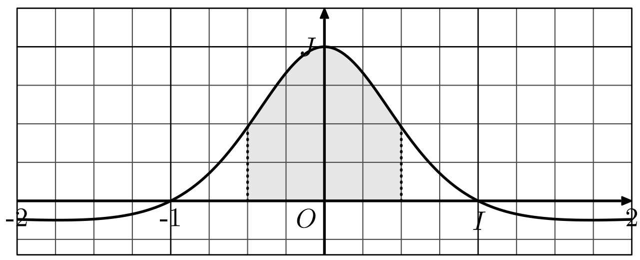
(2) Déterminer l'aire de la partie hachurée :



E.32 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1-x^2}{\big(1+x^2\big)^2}$$

Ci-dessous, est donnée la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé :



Le domaine grisé est délimité par :

- la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses ;
- les droites d'équations $x = -0{,}5$ et $x = 0{,}5$.

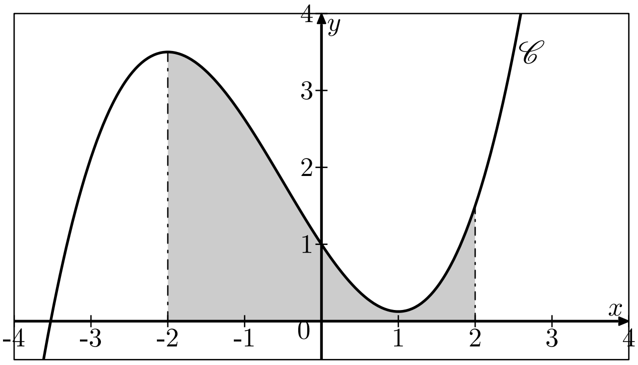
Pour tout nombre a est un nombre de l'intervalle $\big[-1\,;1\big]$, on note I_a la valeur de l'intégrale de la fonction f entre -1 et a.
Voici un tableau de valeurs arrondies à 10^{-3} :

a	-1	$-0{,}75$	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0	0,25	0,5	0,75	1
I_a	0	0,02	0,1	0,265	0,5	0,735	0,9	0,98	1

Déterminer l'aire du domaine grisé.

E.33 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$f(x) = 0{,}25{\cdot}x^3 + 0{,}375{\cdot}x^2 - 1.5{\cdot}x + 1$



On considère le domaine $\mathcal{D}$ délimité par :

- la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.
- les deux droites d'équations $x=-2$ et $x=2$.

Pour tout nombre a appartenant à l'intervalle $\left[-3\,;3\right]$, on note I_a la valeur de l'intégrale entre -3 et a. Voici un tableau de valeurs arrondies à 10^{-3} :

a	-3	-2	-1	0	1	2	3
I_a	0	3,0625	6,25	8,0625	8,5	9,0625	12,75

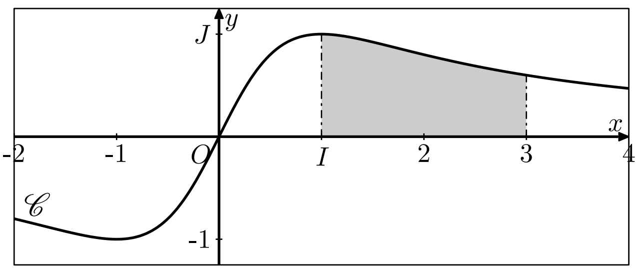
Déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

14. *Calculatrice et calcul d'intégrales*

E.34 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{2{\cdot}x}{x^2+1}$$

Ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f :



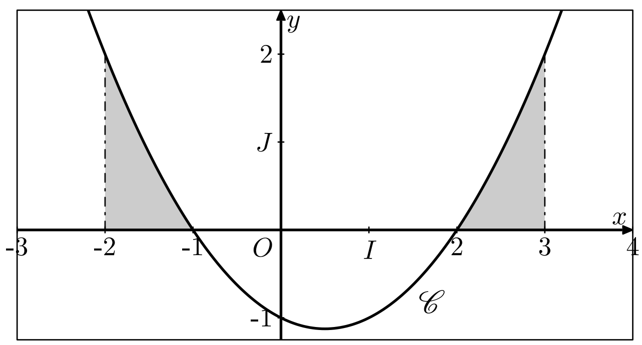
On désigne par $\mathcal{D}$ le domaine grisé ci-dessus.

1. Décrire le domaine $\mathcal{D}$.
2. À l'aide de la calculatrice, détermine l'aire du domaine $\mathcal{D}$, arrondie à 10^{-4} près.

E.35 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$f(x) = 0{,}5{\cdot}x^2 - 0{,}5{\cdot}x - 1$

Ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f :



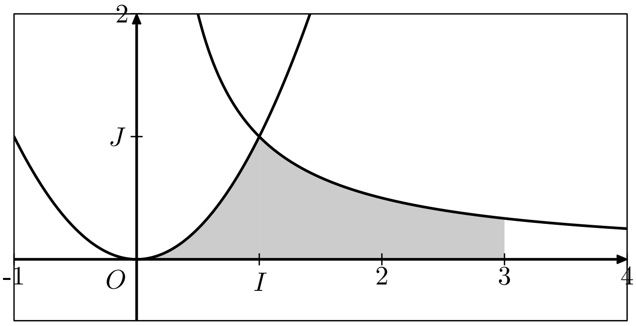
On désigne par $\mathcal{D}$ le domaine grisé ci-dessus.

À l'aide de la calculatrice, déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ à 10^{-4} près.

15. *Jonction de deux courbes*

E.36 On considère les deux fonctions de référence : la fonction carrée notée f et la fonction inverse notée g.

On donne la représentation des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g dans le repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ ci-dessous :



On considère le domaine $\mathcal{D}$ grisé ci-dessus et :

- délimité par les droites d'équations $x=0$ et $x=1$;
- et entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et l'axe des ordonnées.

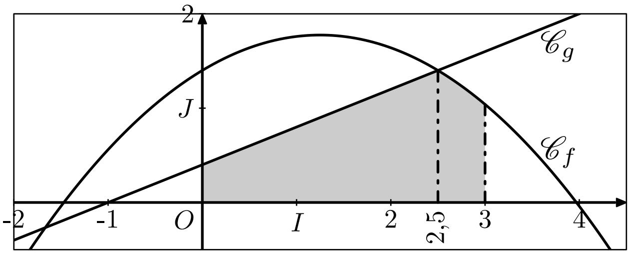
1. a. Pour tout réel a positif ou nul, on admet que l'intégrale de la fonction f entre 0 et a a pour expression :
   $$\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}{\cdot}a^3$$
   Déterminer le domaine sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre 0 et 1.

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la mesure du domaine sous la courbe $\mathscr{C}_g$ entre 1 et 3, arrondie au millième près.
2. En déduire la mesure du domaine $\mathcal{D}$ grisé, arrondie au millième près.

E.37 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = -0{,}24{\cdot}x^2 + 0{,}6{\cdot}x + 1{,}4 \quad ; \quad g(x) = 0{,}4{\cdot}x + 0{,}4$$

Dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on a les représentations des courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g :



Pour a un nombre réel compris entre $\big[-1\,;4\big]$, on a les informations complémentaires :

- Pour a un nombre réel de l'intervalle $\big[0\,;4\big]$, on note I_a l'aire du domaine sous la courbe $\mathscr{C}_f$ compris entre les droites $x=0$ et $x=a$. Voici un tableau de valeurs de I_a arrondies à 10^{-3} :

a	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
I_a	0	0,765	1,62	2,505	3,36	4,125	4,74	5,145	5,28

- Pour calculer l'aire du domaine sous la courbe $\mathscr{C}_g$ compris entre les droites $x=-1$ et $x=a$, on utilise le calcul intégral suivant :
$$\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}2{\cdot}a^2 + 0{,}4{\cdot}a$$

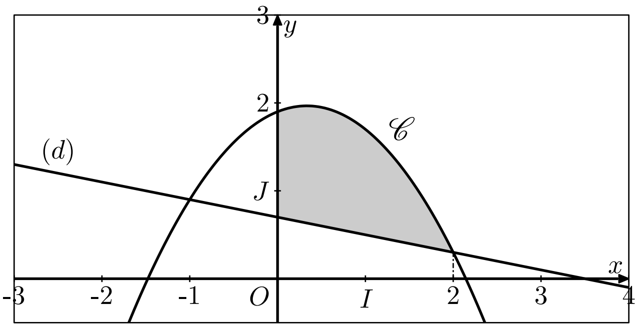
Déterminer l'aire grisée en laissant les étapes de votre raisonnement.

16. *Domaine entre deux courbes*

E.38 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -0{,}6{\cdot}x^2 + 0{,}4{\cdot}x + 1{,}9$$

Ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$:



On considère la droite (d), courbe représentative de la fonction g définie par :

$$g(x) = -0{,}2{\cdot}x + 0{,}7$$

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ se situe au-dessus de la droite (d) sur l'intervalle $\big[-1\,;2\big]$.

Le domaine $\mathcal{D}$ est le domaine du plan ayant pour caractéristiques :

- délimité par les droites $x=0$ et $x=2$;
- situé entre la droite (d) et la courbe $\mathscr{C}$.

On utilisera les données suivantes :

- Pour tout nombre a appartenant à l'intervalle $\big[-1\,;2\big]$, on note I_a l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=a$. Ci-dessous est donné un tableau de valeurs arrondies à 10^{-3} près :

a	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2
I_a	0	0,625	1,5	2,475	3,4	4,125	4,5

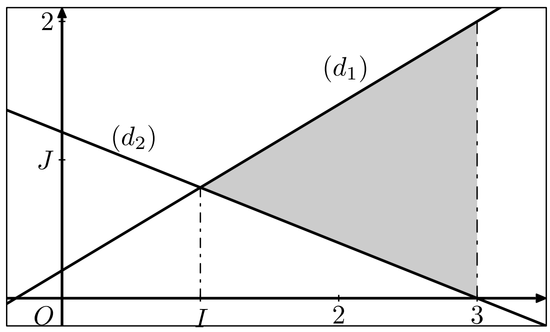
- Pour tout nombre $a\in\big[0\,;2\big]$, on admet que l'intégrale de la fonction g de 0 à a a pour valeur :
$$\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x = -0{,}1{\cdot}a^2 + 0{,}7{\cdot}a$$

Déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

E.39 On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0{,}6{\cdot}x + 0{,}2 \quad ; \quad g(x) = -0{,}4{\cdot}x + 1{,}2$$

dont les représentations graphiques sont respectivement les droites (d_1) et (d_2) représentées ci-dessous :



- Pour tout nombre a appartenant à l'intervalle $\big[0\,;3\big]$, on note I_a l'aide du domaine délimité par la droite (d_1), l'axe des abscisses, les droites d'équations $x=0$ et $x=a$. Voici un tableau de valeurs :

a	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
I_a	0	0,175	0,5	0,975	1,6	2,375	3,3

- Pour un nombre réel a appartenant à $\big[1\,;3\big]$, on admet que l'aire du domaine situé sous leurs courbes respectives se déterminent par le calcul intégral :
$$\int_1^a g(x)\,\mathrm{d}x = -0{,}2{\cdot}a^2 + 1{,}2{\cdot}a - 1$$

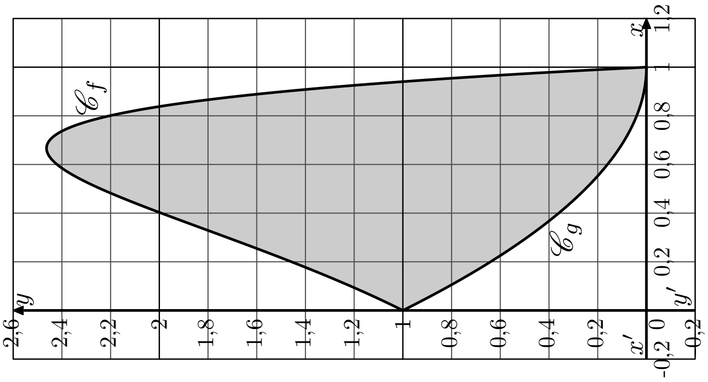
En déduire l'aire du domaine grisé.

17. *Domaine entre deux courbes et calculatrices*

E.40 Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.
Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies pour tout réel x de $\big[0\,;1\big]$ par :

$f(x) = \big(1-x\big)\cdot\mathrm{e}^{3x} \quad ; \quad g(x) = x^2 - 2\cdot x + 1$

Leurs courbes représentatives seront notées $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

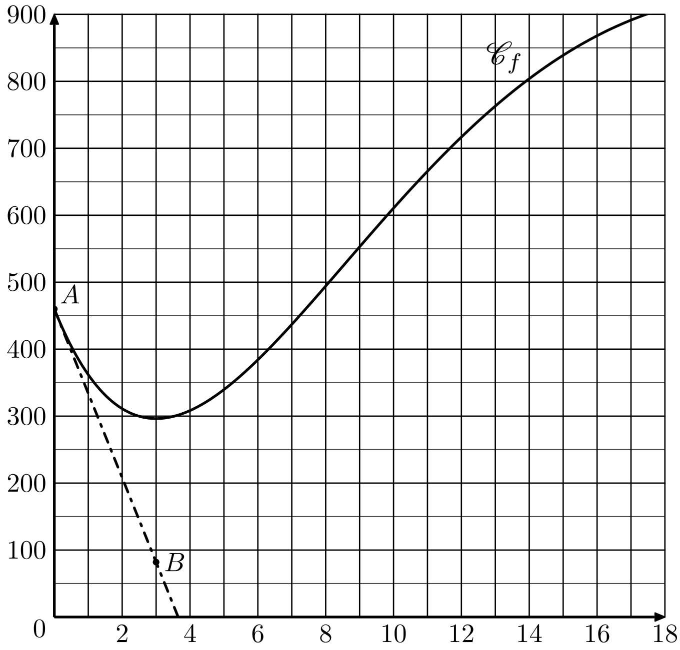


Déterminer l'aire de la partie grisée, sur le graphique, comprise entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $\big[0\,;1\big]$, arrondie au millième près.
(On justifiera les étapes de son raisonnement)

18. *Exercices non-classés*

E.41 Partie A

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous, associée à une fonction f définie sur l'intervalle $\big[0\,;19\big]$, représente l'audience journalière d'une chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 *(année numéro* 0*)* et le 1er janvier 2019 *(année numéro* 19*)*, c'est-à-dire quotidien de téléspectateurs, en milliers.



Ainsi, le 1er janvier 2000 la chaîne a été regardée par environ 460 000 téléspectateurs.

1. Décrire l'évolution de l'audience quotidienne de cette chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 et le 1er janvier 2019.
2. Donner une valeur approchée du nombre de téléspectateurs le 1er janvier 2014.
3. La droite (AB), où les points A et B ont pour coordonnées $A(0\,;460)$ et $B(3\,;82)$ est la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.
Déterminer la valeur de $f'(0)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f représentée par $(\mathscr{C})$?

Partie B

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne de télévision lors des dix prochaines années.
On considère que le nombre quotidien *(exprimé en milliers)* de téléspectateurs de la chaîne est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $\big[0\,;29\big]$ par :

$f(x) = \big(20x^2 - 80x + 460\big)\cdot e^{-0{,}1x}$

où x représente le nombre d'années depuis 2000 *(par exemple* $x=19$ *pour l'année 2019)*.

1. Donner une valeur approchée au millier du nombre de téléspectateurs de la chaîne le 1er janvier 2014.
2. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $\big[0\,;29\big]$.
   a. Démontrer que f' est définie par :
   $f'(x) = \big(-2x^2 + 48x - 126\big)\cdot e^{-0{,}1x}$
   b. On considère l'équation : $-2x^2+48x-126=0$
   Un logiciel de calcul formel donne :

Instruction :	Résultat
Solve($-2x^2+48x-126=0$)	3 et 21

   Retrouver ce résultat par le calcul.
   c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $\big[0\,;29\big]$ et construire le tableau des variations de f sur l'intervalle $\big[0\,;29\big]$. Arrondir les éléments du tableau à l'unité.
   d. Le nombre quotidien de téléspectateurs de cette chaîne de télévision dépassera-t-il la barre du million avant l'année 2029? Justifier.
3. Montrer que l'équation $f(x)=800$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\big[3\,;21\big]$. Déterminer un encadrement d'amplitude 1 de α.
Au cours de quelle année le nombre journalier de téléspectateurs de la chaîne de télévision dépassera-t-il 800 000?
4. On admet que la fonction F définie sur l'intervalle $\big[0\,;29\big]$ par :
$F(x) = \big(-200x^2 - 3\,2000x - 36\,600\big)\cdot e^{-0{,}1x}$
est une primitive de la fonction f.
Déterminer à mille près l'audience journalière moyenne de téléspectateurs de la chaîne de télévision entre le 1er

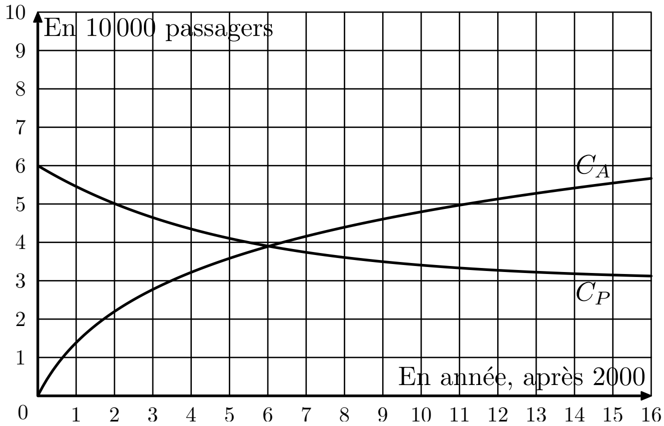
janvier 2018 et le 1er janvier 2019.

E.42 Une compagnie aérienne propose à partir du premier janvier de l'année 2000 une nouvelle formule d'achat de billets, la formule *Avantage* qui s'ajoute à la formule *Privilège* déjà existante.

Une étude a permis de modéliser l'évolution du nombre de passagers transportés depuis l'année 2000 et la compagnie admet que ce modèle est valable sur la période allant de l'année 2000 à l'année 2016.

Le nombre de passagers choisissant la formule *Privilège* est modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0\,;16]$ et le nombre de passagers choisissant la formule *Avantage* est modélisé par la fonction A définie sur l'intervalle $[0\,;16]$. Le graphique donné ci-dessous représente les courbes représentatives C_p et C_A de ces deux fonctions.

Lorsque x représente le temps en année à partir de l'année 2000, $P(x)$ représente le nombre de passagers, exprimé en dizaine de milliers, choisissant la formule *Privilège* et $A(x)$ représente le nombre de passagers, exprimé en dizaine de milliers, choisissant la formule *Avantage*.



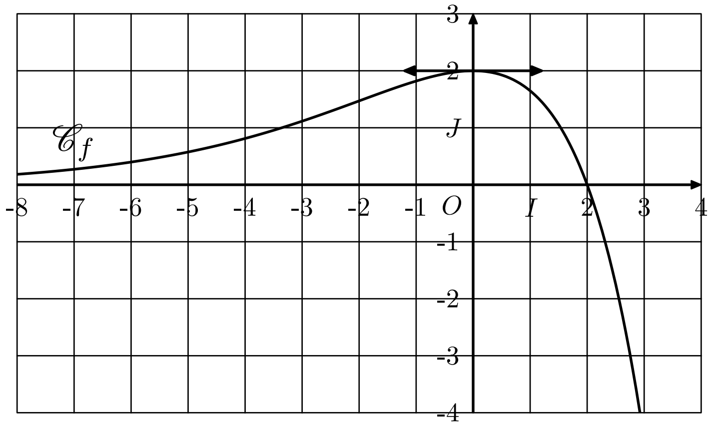
Les estimations seront obtenues par lecture graphique.

1. Donner une estimation du nombre de passagers qui, au cours de l'année 2002, avaient choisi la formule *Privilège*.
2. Donner une estimation de l'écart auquel la compagnie peut s'attendre en 2015 entre le nombre de passagers ayant choisi la formule *Avantage* et ceux ayant choisi la formule *Privilège*.
3. Comment peut-on interpréter les coordonnées du point d'intersection des deux courbes au regard de la situation proposée?
4. Justifier que la compagnie aérienne peut, selon ce modèle, estimer que le nombre total de passagers ayant choisi la formule *Privilège* durant la période entre 2007 et 2015 sera compris entre 240 000 et 320 000.

E.43 On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;6]$ par :
$f(x) = 1 - (x+1)\cdot e^{-x}$

1. Montrer que $f'(x) = x\cdot e^{-x}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
2. Démontrer que l'équation $f(x)=0{,}6$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\,;6]$.
Déterminer une valeur arrondie de α à 0,01.
3. On admet que la fonction F définie sur $[0\,;6]$ par :
$F(x) = x + (x+2)\cdot e^{-x}$
est une primitive de f sur $[0\,;6]$. Donner la valeur exacte puis une valeur arrondie à 10^{-3} de : $I = \int_0^6 f(x)\,dx$

E.44 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé :



1. Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.
2. À main levée, reproduire le repère et la courbe représentative de la fonction f, puis hachuré un domaine du plan ayant pour aire la valeur $\mathcal{A}$ où :
$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x)\,dx$. *(on ne cherchera pas à pas déterminer la valeur de $\mathcal{A}$.)*
3. a. Tracer, à main levée, la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

   b. Par lecture graphique, donner la valeur du nombre dérivée $f'(2)$, arrondie au dixième près.

E.45 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = (-x+2)\cdot \mathrm{e}^{0{,}5x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. a. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

   $$F(x) = (-2x+8)\cdot \mathrm{e}^{0{,}5x}$$

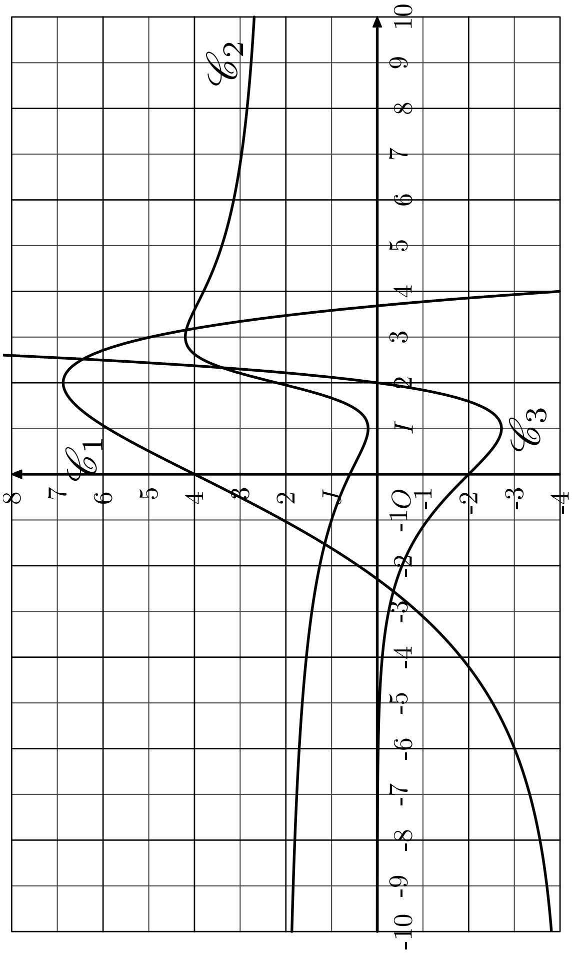
   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   b. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

2. On considère G une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$.

   Parmi les trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ci-dessous, une seule est la représentation graphique de G.

   Déterminer la courbe qui convient et justifier la réponse :



E.46 On considère la fonction f définie par la relation :
$f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Pour chaque proposition, une seule réponse est correcte. Indiquer la bonne réponse en justifiant votre démarche :

1	f est définie sur :	$]-\infty\,;0]$	$]-\infty\,;0[$	$[0\,;+\infty[$	$\mathbb{R}$
2	La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est	$2x\cdot e^{-2x}$	$-2x\cdot e^{-2x}$	$-2\cdot e^{-2x}$	$2\cdot e^{-2x}$
3	Sur son ensemble de définition, la fonction f est	croissante	décroissante	constante	Ni croissante, ni décroissante
4	Au point d'abscisse 0, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour tangente la droite d'équation	$-2x$	$-2x+1$	$-2x-1$	$2x-1$
5	Une primitive de la fonction f admet pour expression	$-2\cdot e^{-2x}$	$2\cdot e^{-2x}$	$\dfrac{e^{-2x}}{2}$	$-\dfrac{e^{-2x}}{2}$
6	Le domaine $\mathcal{D}$ défini par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ a pour mesure d'aire	$\dfrac{1}{2}\cdot\left(1+e^{-2}\right)$	$\dfrac{1}{2}\cdot\left(1-e^{-2}\right)$	$\dfrac{1}{2}\cdot\left(-1+e^{-2}\right)$	$\dfrac{1}{2}\cdot\left(-1-e^{-2}\right)$